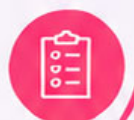


با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضی و آمار دهم انسانی

رشته علوم انسانی - پایه دهم

فصل ۱ تا ۵

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌ها

تهیه شده در ایران توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۴	۱ فصل اول — عبارتهای جبری
۲۱	۲ فصل دوم — معادله درجه دوم
۵۷	۳ فصل سوم — تابع
۱۰۲	۴ فصل چهارم — کار با داده‌های آماری
۱۲۳	۵ فصل پنجم — نمایش داده‌ها



گام به گام ریاضی و آمار دهم انسانی - فصل اول

عبارت‌های جبری

فهرست

درس اول: چند اتحاد جبری و کاربردها

۴	۱	صفحه ۱۰ کار در کلاس — تکمیل تساوی‌ها با اتحادها
۴	۲	صفحه ۱۰ کار در کلاس — تجزیه با اتحادها
۴	۳	صفحه ۱۱ کار در کلاس — تجزیه به ساده‌ترین حالت
۵	۴	صفحه ۱۱ کار در کلاس — محاسبات عددی با اتحادها
۵	۵	صفحه ۱۲ کار در کلاس — ساده کردن توان‌های سوم و چهارم دوجمله‌ای
۵	۶	صفحه ۱۲ فعالیت — مثلث خیام
۷	۷	صفحه ۱۳ کار در کلاس — بسط مکعب دوجمله‌ای
۷	۸	صفحه ۱۴ کار در کلاس — توان‌های عدد ۲ و مثلث خیام
۸	۹	صفحه ۱۴ کار در کلاس — توان‌های عدد ۱۱
۹	۱۰	صفحه ۱۵ کار در کلاس — اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دوجمله‌ای
۹	۱۱	صفحه ۱۵ فعالیت — تجزیه با اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب
۹	۱۲	صفحه ۱۵ تمرین — پرسش ۱
۱۰	۱۳	صفحه ۱۵ تمرین — پرسش ۲
۱۰	۱۴	صفحه ۱۵ تمرین — پرسش ۳

۱۵	صفحه ۰۱۵ تمرین — پرسش ۴	۱۰
۱۶	صفحه ۰۱۵ تمرین — پرسش ۵	۱۱
۱۷	صفحه ۰۱۵ تمرین — پرسش ۶	۱۱
۱۸	صفحه ۰۱۵ تمرین — پرسش ۷	۱۱

درس دوم: عبارت‌های گویا

۱۹	صفحه ۰۱۸ فعالیت — عبارت‌های گویا و غیرگویا	۱۱
۲۰	صفحه ۰۱۹ کار در کلاس — تشخیص عبارت گویا و مقادیر تعریف نشده	۱۲
۲۱	صفحه ۰۱۹ کار در کلاس — ساده کردن کسرها	۱۲
۲۲	صفحه ۰۲۱ فعالیت — مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها	۱۴
۲۳	صفحه ۰۲۲ کار در کلاس — کوچک‌ترین مضرب مشترک و مخرج مشترک	۱۴
۲۴	صفحه ۰۲۳ فعالیت — جمع دو عبارت گویا	۱۵
۲۵	صفحه ۰۲۳ کار در کلاس — جمع و تفریق عبارت‌های گویا	۱۶
۲۶	صفحه ۰۲۴ تمرین — پرسش ۱	۱۶
۲۷	صفحه ۰۲۴ تمرین — پرسش ۲	۱۷

ایران نوین
توشه‌ای برای موفقیت

درس اول: چند اتحاد جبری و کاربردها

فصل اول: عبارت های جبری

۱

تکمیل تساوی ها با اتحادها

کار در کلاس

صفحه ۱۰

۱

با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی های زیر را کامل کنید:

الف) $(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$

ب) $(3a-1)^2 = 9a^2 - 6a + 1$

پ) $(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2 = 2 + 2b + \frac{1}{2}b^2$

ت) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$

ث) $(x+4)(x+3) = x^2 + 7x + 12$

ج) $(3x+2)(3x-5) = (3x)^2 + (2-5)(3x) + (2)(-5) = 9x^2 - 9x - 10$

چ) $(x+2)(x+1) = x^2 + 3x + 2$

تجزیه با اتحادها

کار در کلاس

صفحه ۱۰

۲

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک، عبارت های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $9x^2 - 16 = (3x-4)(3x+4)$

ب) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^2 + 2(\frac{1}{3})x + (\frac{1}{3})^2 = (x + \frac{1}{3})^2$

پ) $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2(2x) + (1)^2 = (2x-1)^2$

ت) $y^2 + 3y - 10 = y^2 + (5-2)y - (5)(2) = (y-2)(y+5)$

ث) $9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6 \times (3x) + 8$

$$= (3x)^2 + (2+4)(3x) + (2)(4)$$

$$= (3x+2)(3x+4)$$

تجزیه به ساده ترین حالت

کار در کلاس

صفحه ۱۱

۳

عبارت های جبری زیر را به صورت ساده ترین حالت، تجزیه کنید.

الف) $12x^2(x^2+6)^3 - 8x^5(x^2+6)^2$

$$= 4x^5(x^2+6)^2(3x^2-2(x^2+6))$$

$$= 4x^5(x^2+6)^2(x^2-12)$$

$$= 4x^5(x^2+6)^2(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})$$

ب) $x^4 - 64x^2 = x^2(x^2 - 64)$

$$= x^2(x^2 - 8)(x^2 + 8)$$

$$= x^2(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})(x^2 + 8)$$

بعضی از محاسبات عددی را می‌توان با کمک از اتحادها، به راحتی به دست آورد. تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\text{الف)} \quad (999)^2 = (1000 - 1)^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$$

$$\text{ب)} \quad 96 \times 104 = (100 - 4)(100 + 4) = 10000 - 16 = 9984$$

$$\text{پ)} \quad 102^2 = (100 + 2)^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$$

ت) خودتان نیز یک مثال عددی بزنید که برای محاسبه آن از اتحادها، کمک گرفته‌اید.

$$\begin{aligned} 12^2 - 8^2 &= (10 + 2)^2 - (10 - 2)^2 = \\ &= [10^2 + 2(10)(2) + 2^2] - [10^2 + 2(10)(-2) + (-2)^2] = \\ &= [10^2 + 2(10)(2) + 2^2] - 10^2 + 2(10)(2) - (-2)^2 = 40 + 40 = 80 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$12^2 - 8^2 = (12 - 8)(12 + 8) = 4 \times 20 = 80$$

ث) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می‌رسد؟ لطفاً توضیح دهید.

برای سهولت در بعضی از محاسبات می‌توان از اتحادها کمک گرفت. مثلاً برای محاسبه 99^3 یا $(101)^3$

$$(101)^3 = (100 + 1)^3 = (100)^3 + 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 + 1^3 = 1030301$$

یا

$$205^2 - 105^2 = (205 - 105)(205 + 105) = 100 \times 310 = 31000$$

ساده کردن توان‌های سوم و چهارم دوجمله‌ای

کار در کلاس

صفحه ۱۲

۵

عبارت جبری $(a + b)^3$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و حاصل ضرب عبارت‌های جبری ساده کنید.

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

برای ساده کردن $(a + b)^4$ چگونه عمل می‌کنید؟

با توجه به اینکه $(a + b)^3$ در مرحله قبل برای ما محاسبه شده است، برای تعیین $(a + b)^4$ می‌توان حاصل عبارت

$$(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b)$$

آیا این پرسش را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۴ نیز طرح کرد؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان ساده کردن عبارت‌های حاصل ضرب، جواب نهایی را به دست آورد؟

بله می‌توان این سؤال را برای توان‌های بزرگ‌تر از ۴ را پرسید و به طور مشابه روش بالا حاصل را به دست آورد.

مثلت خیام

فعالیت

صفحه ۱۲

۶

توشه‌ای برای موفقیت

جدول زیر را در نظر بگیرید.

۱	$(a + b)^0 = 1$										
۱	۱	$(a + b)^1 = 1a + 1b$									
۱	۲	۱	$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$								
۱	۳	۳	۱	$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$							
۱	۴	۶	۴	۱	$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$						
۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱	$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$					
۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱	$(a + b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$				
۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱	$(a + b)^7 = 1a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + 1b^7$			
۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱	$(a + b)^8 = 1a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + 1b^8$		
۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	۱	$(a + b)^9 = 1a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + 1b^9$	
۱	۱۰	۴۵	۱۲۰	۲۱۰	۲۵۲	۲۱۰	۱۲۰	۴۵	۱۰	۱	$(a + b)^{10} = 1a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + 1b^{10}$

۱. در جدول بالا سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی بین سطر سوم و سطر چهارم وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین سطر چهارم و سطر پنجم وجود دارد؟

سطر سوم هم به مانند سطر دوم با یک شروع و با یک ختم می‌شود و عدد وسط از جمع دو عدد بالا حاصل می‌شود. همین ارتباط بین سطر سوم و چهارم نیز وجود دارد یعنی هر عدد از جمع طرفین اعداد سطر بالایی ایجاد می‌شود. در سطر چهارم سطر پنجم نیز مشابه سطرهای قبلی همان ارتباط وجود دارد.

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

۲. آیا می‌توانید سطرهای هفتم و هشتم را کامل کنید؟

← سطر ششم	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱		
← سطر هفتم	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱	
← سطر هشتم	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱

۳. چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا در سمت راست وجود دارد؟ اعداد واقع در هر سطر مثلث خیام، ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا، در سمت راست را تشکیل می‌دهند.

۴. آیا می‌توانید ضرایب $(a+b)^4$ را در جدول سمت راست، کامل کنید؟

$$(a+b) = 1a^1 + 0a^0b + 0a^0b^2 + 0a^0b^3 + 1b^1$$

۵. آیا می‌توانید توان‌های a و b در عبارت $(a+b)^5$ در جدول سمت راست را کامل کنید؟

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

۶. آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب توان‌های $(a+b)$ وجود دارد؟

در عبارت جبری $(a+b)^n$ ، اعداد مثلث خیام تشکیل ضرایب عبارت جبری را می‌دهد و جمله اول دارای توان n می‌باشد برای بدست آوردن توان‌های جمله بعدی می‌بایست ضریب جمله را در توان a در جمله اول عبارت جبری ضرب کرده و به تعداد جملات تقسیم کنیم و این روند را جملات بعد نیز تکرار کنیم و در هر مرحله با کاسته شدن توان‌های a به توان b یک واحد اضافه می‌گردد یعنی در جمله اول توان b در جمله دوم توان b یک و در جمله سوم توان b دو و... می‌باشد.

۷. با توجه به اینکه $a-b = a+(-b)$ ، حاصل عبارت $(a-b)^3$ را بر اساس اتحاد $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ به دست آورید؟

$$(a-b)^3 = [a+(-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

با توجه به مثلث خیام، اتحادهای زیر را خواهیم داشت:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$(2a+1)^3 = 8a^3 + 3(2a)^2(1) + 6a + 1 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$$

$$\left(\frac{1}{3}a - 2\right)^3 = \left(\frac{1}{3}a\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}a\right)^2(2) + 3\left(\frac{1}{3}a\right)(2)^2 - 8 = \frac{1}{27}a^3 - \frac{2}{3}a^2 + 4a - 8$$

$$(4a - 2b)^3 = (4a)^3 - 3(4a)^2(2b) + 3(4a)(2b)^2 - 8b^3 = 64a^3 - 96a^2b + 48ab^2 - 8b^3$$

$$\left(3a + \frac{1}{4}\right)^3 = 27a^3 + 3(3a)^2\left(\frac{1}{4}\right) + 3(3a)\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{64} = 27a^3 + \frac{27}{4}a^2 + \frac{9}{16}a + \frac{1}{64}$$

توان‌های عدد ۲ و مثلث خیام

در تساوی‌های زیر، به جای علامت سؤال، عدد مناسب قرار دهید:

$$1 = 2^0$$

$$1 + 1 = 2^1$$

$$1 + 2 + 1 = 2^2$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4$$

- چه ارتباطی بین توان‌های عدد ۲ و سطرهای واقع در مثلث خیام وجود دارد؟

توان عدد ۲ یک واحد کمتر از شماره‌ی سطر واقع در مثلث خیام می‌باشد.

- آیا می‌توانید الگویی برای توان‌های عدد ۲، برحسب سطرهای واقع در مثلث خیام حدس بزنید؟

توان‌های عدد ۲ سطر متناظر با توان مربوطه را در نظر گرفته و اعداد واقع در آن سطر را با هم جمع می‌کنیم. به عبارتی:

مجموع عددهای سطر n ام مثلث خیام $= 2^n$

- بر اساس این الگو مقدار 2^{10} را به دست آورید.

اگر مثلث خیام را ادامه دهیم به الگوی زیر می‌رسیم:

۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱	توان ۵				
۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	توان ۶				
۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	توان ۷				
۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	توان ۸			
۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	توان ۹	
۱	۱۰	۴۵	۱۲۰	۲۱۰	۲۵۲	۲۱۰	۱۲۰	۴۵	۱۰	توان ۱۰

که با جمع اعداد موجود در این سطر داریم: $1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024$

- آیا می‌توانید مانند الگوی بالا، الگوهای دیگری از مثلث خیام حدس بزنید؟

$$\begin{aligned} 11^2 &= (10 + 1)^2 = 10^2 + 2 \times 10 \times 1 + 1 = (2) \\ 11^3 &= (10 + 1)^3 = 10^3 + 3(10)^2 + 3(10) + 1 = 1331 \\ 11^4 &= ((11)^2)^2 = 121^2 = (100 + 21)^2 = 14641 \\ 11^5 &= (11)^5 = 161051 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ \hline 121 \longrightarrow 11^2 \\ 121 \\ \hline 1331 \longrightarrow 11^3 \\ 1331 \\ \hline 14641 \longrightarrow 11^4 \\ 14641 \\ \hline 161051 \longrightarrow 11^5 \\ 161051 \\ \hline 1771561 \longrightarrow 11^6 \end{array}$$

توان‌های عدد ۱۱

کار در کلاس

صفحه ۱۴

۹

توان‌های مختلف ۱۱ را، به دست آورید.

$$11^0 = 1$$

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = (1 + 10)^2 = 1 + 2 \times 10 + 10^2 = 1 + 20 + 100 = 121$$

$$11^3 = (1 + 10)^3 = 1 + 3(1)^2(10) + 3(1)(10)^2 + 10^3 = 1 + 30 + 300 + 1000 = 1331$$

$$11^4 = (1 + 10)^4 = 1 + 4 \times 10 + 6 \times 100 + 4 \times 1000 + 10^4 = 14641$$

- چه ارتباطی بین توان بدست آمده در 11^2 و اعداد واقع در سطر سوم مثلث خیام وجود دارد؟

حاصل 11^2 در واقع برابر است با ۱۲۱ که همان اعداد سطر سوم مثلث خیام می‌باشد که پشت سر هم قرار گرفته‌اند.

- چه ارتباطی بین توان بدست آمده در 11^3 و اعداد واقع در سطر چهارم مثلث خیام وجود دارد؟

حاصل 11^3 در واقع برابر است با ۱۳۳۱ که همان اعداد سطر چهارم مثلث خیام می‌باشد که پشت سر هم قرار گرفته‌اند.

- چه ارتباطی بین توان بدست آمده در 11^4 و اعداد واقع در سطر پنجم مثلث خیام وجود دارد؟

حاصل 11^4 همان اعداد سطر پنجم مثلث خیام است که از چپ به راست پشت سر هم قرار گرفته‌اند.

- آیا می‌توانید بدون هیچ گونه محاسبه‌ای 11^5 را بر حسب اعداد واقع در سطر ششم مثلث خیام به دست آورید؟

$$11^5 = 1 \quad 10 \quad 45 \quad 105 \quad 10 \quad 45 \quad 1 \rightarrow 161051$$

اما این نتیجه‌گیری درست نمی‌باشد و حاصل $11^5 = 161051$

- چه نتیجه‌ای می‌توانید برای توان‌های مختلف ۱۱، بگیرید؟

نتیجه می‌گیریم که برای به دست آوردن توان‌های ۱۱ تا توان چهارم می‌توان اعداد سطرهای مثلث خیام را از سمت چپ به راست نوشت اما از سطر ششم به بعد یعنی از 11^5 به بعد دیگر این اسلوب درست نمی‌باشد. با توجه به اینکه کتاب گفته بدون هیچ محاسبه‌ای اسلوب درست نمی‌باشد، مگر آنکه اگر عددی در اون سطر مساوی ۱۰ یا بیشتر از آن باشد، یکان آن را می‌نویسیم و دهگان آن را با عدد قبلی آن جمع می‌کنیم.

با توجه به اتحادهایی که تاکنون یاد گرفته‌اید، اتحادهای زیر را با استفاده از حاصل ضرب عبارت‌های جبری بررسی کرده و تساوی دو طرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}-\cancel{a^2b}-\cancel{ab^2}-b^3=a^3-b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-(a^2b+ab^2)+b^3=a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}+\cancel{ba^2}-\cancel{ab^2}+b^3=a^3+b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+(a^2b-ab^2)+b^3=a^3+b^3$$

تجزیه با اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب

با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$8y^3-1=(2y)^3-1^3=(2y-1)((2y)^2+(2y)+1^2)=(2y-1)(4y^2+2y+1)$$

$$8a^3+1=(2a)^3+1^3=(2a+1)((2a)^2-(2a)+1)=(2a+1)(4a^2-2a+1)$$

$$8a^3+b^3=(2a)^3+b^3=(2a+b)((2a)^2-2ab+b^2)=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$$

$$t^6-\frac{1}{8}=(t^2)^3-(\frac{1}{2})^3=(t^2-\frac{1}{2})((t^2)^2+(t^2)(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2)=(t^2-\frac{1}{2})(t^4+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{4})$$

پرسش ۱

۱. با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x-1)^2=x^2-2x+1$$

$$(y+\frac{1}{4})^2=y^2+2y(\frac{1}{4})+(\frac{1}{4})^2=y^2+\frac{2y}{4}+\frac{1}{16}=y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}$$

$$(2-\frac{a}{3})^2=4-2\times 2\times \frac{a}{3}+(\frac{a}{3})^2=4-\frac{4}{3}a+\frac{a^2}{9}$$

$$(2z-\frac{1}{4})^3=(2z)^3-3(2z)^2(\frac{1}{4})+3(2z)(\frac{1}{4})^2-(\frac{1}{4})^3=8z^3-6z^2+\frac{3}{2}z-\frac{1}{8}$$

$$(\frac{1}{4}+\frac{b}{3})^3=(\frac{1}{4})^3+3(\frac{1}{4})^2(\frac{b}{3})+3(\frac{1}{4})(\frac{b}{3})^2+(\frac{b}{3})^3=\frac{1}{64}+\frac{1}{16}b+\frac{b^2}{12}+\frac{b^3}{27}$$

۲. با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه‌چین، عبارت مناسب بگذارید.

$$(a + \sqrt{2})^2 = a^2 + 2\sqrt{2}a + 2$$

$$(1 - 2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$(\sqrt{3} + x)^3 = 3\sqrt{3} + 9x + 3\sqrt{3}x^2 + x^3$$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۳. به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^6 - 1$$

$$\text{روش اول } (x^6 - 1) = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{روش دوم } (x^6 - 1) = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) =$$

$$1 + z^3 = (1 + z)(1 - z + z^2)$$

$$8 - t^6 = 2^3 - (t^2)^3 = (2 - t^2)(4 + 2t^2 + t^4)$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 3x^2 - 2(3x) + 1 = (3x - 1)^2$$

$$25x^2 + 25x + 6 = (5x + 2)(5x + 3)$$

$$4x^2 + 14x + 12 = (2x + 3)(2x + 4)$$

۴- کدام یک از عبارات زیر، نشان دهنده اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای و یا اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای است؟

$$(3x + 5)(9x^2 - 20x + 15)$$

اتحاد نیست، چون جمله وسط از پرانتز دوم در این اتحاد باید $15x -$ باشد و عدد ۱۵ باید ۲۵ باشد.

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

$$(4x + y)(16x^2 + 4xy + y^2)$$

اتحاد نیست، چون علامت جمله وسط در پرانتز دوم باید منفی باشد.

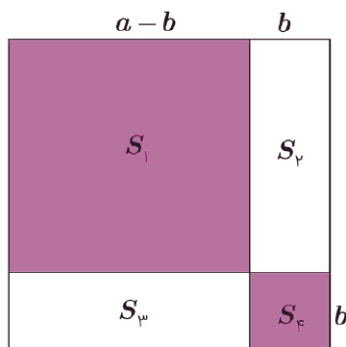
$$(7x - 2)(49x^2 + 14x + 4)$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

۵. عبارت‌های جبری زیر را به صورت ساده‌ترین عبارت تجزیه کنید.

الف) $12x^6(x^2 + 5)^3 - 10x^6(x^2 + 5)^6 = 2x^6(x^2 + 5)^3(6x^2 - 5(x^2 + 5)) = 2x^6(x^2 + 5)^3(x - 5)(x + 5)$

ب) $x^8 - 625x^6 = (x^2)^4 - (25x^2)^2 = (x^2 - 25x^2)(x^2 + 25x^2) = (x^2 - 5x)(x^2 + 5x)(x^2 + 25x^2)$



۶. مربع رو به رو را که اندازه ضلع آن a است در نظر بگیرید و فرض کنید مساحت آن برابر با S است. ضلع آن را به دو پاره خط تقسیم کنید و طول یکی را b در نظر بگیرید.

الف) مساحت‌های S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 را به دست آورید.

$$S_1 = c^2 \quad S_2 = bc \quad S_3 = bc \quad S_4 = b^2$$

ب) مساحت S را بر حسب مساحت‌های S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 به دست آورید.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = c^2 + bc + bc + b^2 = c^2 + 2bc + b^2$$

پ) اتحاد مربع دو جمله ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید؟

$$(c+b)^2 = c^2 + 2cb + b^2$$

۷. با استفاده از اتحادهای خوانده شده عبارت‌های عددی زیر را به دست آورید؟

$$(1001)^3 = \dots$$

$$(99)^3 = (100 - 1)^3 = \dots$$

$$(1001)^3 = (1000 + 1)^3 = (1000)^3 + 3(1000)^2(1) + 3(1000)(1)^2 + 1^3$$

$$= 1000000000 + 3000000 + 3000 + 1 = 1003003001$$

$$(99)^3 = (100 - 1)^3 = 1000000 - 3(10000)(1) + 3(100)(1)^2 - 1 = 970299$$

درس دوم: عبارت‌های گویا

فصل اول: عبارت‌های جبری

توشه ای برای موفقیت

عبارت‌های گویا را با ☒ و عبارت‌های غیر گویا را با ☐ مشخص کنید.

$$\sqrt{x^2} + 1 \quad \text{X}$$

$$\frac{1}{x^6 - \sqrt{2}} \quad \checkmark$$

$$\frac{x - 3}{2x^2 - 3x + 5} \quad \checkmark$$

$$\frac{x+y}{3\sqrt{z}} \quad \text{X}$$

$$\frac{\sqrt{5x}}{x} \quad \checkmark$$

$$x^2 + 3x - 4 \quad \checkmark$$

$$\frac{x^2-1}{x+1} \quad \boxed{\times}$$

$$\sqrt{x} \quad \boxed{\times}$$

$$\frac{|x|}{x^2+2} \quad \boxed{\times}$$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که مخرجش صفر نباشد؛ یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آنگاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است. برای مثال عبارت گویای $\frac{x+2}{x-5}$ به ازای $x=5$ تعریف نشده است؛ زیرا با قرار دادن $x=5$ در آن، مخرج کسر برابر با صفر می‌شود و در این حالت کسر تعریف نشده است.

تشخیص عبارت گویا و مقادیر تعریف نشده

کار در کلاس

صفحه ۱۹

۲۰

کدام یک از عبارت‌های زیر گویا و کدام یک غیر گویا هستند؟ عبارت‌های گویا به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{3z+5}{3z-5}$

ب) $\frac{x+9}{\sqrt{x}-3}$

پ) $\frac{4x^2-5x+1}{7\sqrt{2}}$

ت) $\frac{a^2+3}{a^2-4}$

ث) $\frac{x\sqrt{x+1}}{3-x}$

ج) $\frac{5x^2+1}{x^2+1}$

الف) گویا است. $3z-5=0 \Rightarrow 3z=5 \Rightarrow z=\frac{5}{3}$

عبارت فوق به ازای $z=\frac{5}{3}$ گویا نمی‌باشد، زیرا با قرار دادن $z=\frac{5}{3}$ در عبارت، مخرج کسر برابر با صفر می‌شود و کسر تعریف نشده می‌گردد.

ب) غیر گویا است.

پ) گویا است. به ازای تمام اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ عبارت گویا می‌باشد. $a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$ عبارت فوق به ازای $a=\pm 2$ تعریف نشده می‌گردد.

ث) غیر گویا است.

ج) عبارت گویا است. غ ق ق $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ بنابراین عبارت به ازای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است.

ساده کردن کسرها

کار در کلاس

صفحه ۱۹

۲۱

۱. مانند نمونه‌های حل شده، کسرهایی زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}$

$$= \frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}} = \frac{(x+3)}{(x-3)} \text{ (ساده شده کسر)}$$

صورت کسر را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرده‌ایم.

با شرط $x+3 \neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x+3)$ را

خط زده‌ایم، توجه کنید که برای با معنی بودن کسر باید $x-3 \neq 0$ باشد.

ب) $\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} =$

$$\frac{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{x^2+x+1}{x+1} \text{ (ساده شده کسر)}$$

صورت کسر را به کمک اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

با شرط $x-1 \neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x-1)$ را

خط بزنید. توجه کنید که برای با معنی بودن کسر باید $x+1 \neq 0$ باشد.

$$\text{پ)} \frac{4x^2 - 9}{4x^2 + 10x + 6} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+2)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+2}$$

برای با معنی بودن کسر باید $x = 2 \neq 0$ باشد یا به عبارت دیگر $x \neq -1$ باشد.

$$\text{ت)} \frac{x^5 - 8x}{2x^2 - 8x + 8} = \frac{x(x^4 - 8)}{2(x^2 - 4x + 4)} = \frac{x(x-2)(x^3 + 2x + 4)}{2(x-2)^2} = \frac{x(x^3 + 2x + 4)}{2(x-2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{6x^5(x^2 + 4)^2 - 4x^2(x^2 + 4)^2}{x^4 - 16x^2} &= \frac{2x^2(x^2 + 4)^2[3x^3 - 2(x^2 + 4)]}{(x^2 - 4x^2)(x^2 + 4x^2)} \\ \text{ث)} \frac{2x^2(x^2 + 4)^2(x^2 - 8)}{(x^2 - 2x)(x^2 + 2x)x^2(x^2 + 4)} &= \frac{2x(x^2 + 4)(x^2 - 8)}{x(x-2)x(x^2 + 2)} \end{aligned}$$

برای با معنی بودن کسر باید:

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

$$x \neq 0$$

$$x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$$

۲. کسر زیر به صورت نادرست ساده شده است، ایراد را پیدا کنید و درباره آن توضیح دهید.

$$\frac{2x^3 + y^2}{y^2} = \frac{2x^3 + y^2}{y^2} = 2x^3 + 1$$

در عبارت فوق به نادرستی y^2 از صورت و مخرج کسر حذف شده است در کسرها اگر بین عبارات صورت و مخرج علامت‌های جمع یا تفریق وجود داشته باشد، ما اجازه ساده کردن آن را نداریم و هنگامی می‌توانیم ساده کنیم که جملات صورت و مخرج تجزیه شده باشند و بین عبارت علامت ضرب قرار گرفته باشد تا ما اجازه ساده کردن داشته باشیم.

۳. فرض کنیم $x = 1$ دانش‌آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که $2 = 1$ ، استدلال زیر را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

$$x = 1$$

$$x^2 = x$$

$$x^2 - 1 = x - 1$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1$$

$$x + 1 = 1 \xrightarrow{x=1} 2 = 1$$

$$x + 1 = 1 \xrightarrow{x=1} 2 = 1$$

$$x = 1$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$

از آنجا که $x - 1 = 0$ می‌باشد ما نمی‌توانیم بگوئیم $\frac{x-1}{x-1} = 1$ و این مطلب نادرست می‌باشد و همچنین ساده کردن صورت و مخرج در حالتی که مخرج $x - 1$ می‌باشد نادرست است.

چند جمله‌ای‌های $P(x) = x^2 - 2x + 1$ و $Q(x) = x^2 + 5x - 6$ را در نظر بگیرید.

۱. چند جمله‌ای‌های بالا را تجزیه کنید.

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$$

$$Q(x) = x^2 + 5x - 6 = (x+6)(x-1)$$

۲. عبارت‌های مشترک در تجزیه این دو چند جمله‌ای را مشخص کنید.

۳. عبارت‌های غیر مشترک در تجزیه این دو چند جمله‌ای را مشخص کنید.

۴. حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان را در عبارت‌های غیر مشترک پیدا کنید و آن را $A(x)$ بنامید.

$$A(x) = (x-1)^2(x+6)$$

۵. عبارت‌های $\frac{A(x)}{Q(x)}$ ، $\frac{A(x)}{P(x)}$ را ساده کنید.

$$\frac{A(x)}{P(x)} = \frac{\cancel{(x-1)}^2(x+6)}{\cancel{(x-1)}^2} = x+6$$

$$\frac{A(x)}{Q(x)} = \frac{\cancel{(x-1)}^2\cancel{(x+6)}}{\cancel{(x+6)}\cancel{(x-1)}} = x-1$$

۶. با توجه به قسمت قبل آیا $A(x)$ مضرب مشترک دو عبارت $P(x)$ و $Q(x)$ است؟ بله، زیرا A بر P و Q بخش‌پذیر است.

۷. آیا می‌توانید مضرب‌های مشترک دیگری برای $P(x)$ و $Q(x)$ پیدا کنید؟ بله

۸. از بین مضرب‌های مشترکی که برای $P(x)$ و $Q(x)$ یافتید، کدام یک نسبت به متغیر x از درجه کوچک‌تری دارد؟

$A(x)$ نسبت به x درجه کوچک‌تری دارد.

برای پیدا کردن مضرب مشترک دو چند جمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ به طوری که نسبت به x از کوچک‌ترین درجه باشد، ابتدا هر یک از چند جمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم؛ سپس حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارت‌های غیر مشترک را به دست می‌آوریم و آن را $A(x)$ می‌نامیم. برای جمع یا تفریق دو عبارت گویا که مخرج‌های آنها $P(x)$ و $Q(x)$ باشند؛ عبارت $A(x)$ را مخرج مشترک دو کسر تعریف می‌کنیم.

توشه‌ای برای موفقیت

۱. در هر قسمت مضرب مشترکی از چند جمله‌ای‌ها را به دست آورید به طوری که نسبت به متغیر a آن کوچک‌ترین توان را داشته باشد.

الف) $P(x) = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$ $A(x) = (a+3)^2(a-3)$ ک.م.م

$$Q(x) = a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$$

ب) $P(x) = a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^4 + b^4) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$

$$Q(x) = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

ک.م.م $A(x) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

پ) $P(x) = a^6 + 2a^3 - 3a^2 = a^2(a^2 + 2a - 3) = a^2(a-1)(a+3)$

$$Q(x) = a^3 + \lambda a^2 + \lambda \omega a = a(a^2 + \lambda a + \lambda \omega) = a(a + \omega)(a + \omega)$$

$$\text{جواب} = a^2(a + \omega) \times (a - 1)(a + \omega)$$

حاصل ضرب عبارت‌های
غیر مشترک با بزرگ‌ترین توان

۲. برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم، مخرج مشترک همان مضرب مشترک بین مخرج‌ها با کوچکترین توان نسبت به x است، در زیر مخرج مشترک کسرها را مانند نمونه پیدا کنید.

الف) $\frac{4}{x^2 + x} + \frac{1}{(x^2 - 1)(x + 1)}$

مخرج کسر اول $A(x) = x^2 + x = x(x + 1)$

مخرج کسر دوم $B(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$

مخرج مشترک $= x(x - 1)(x + 1)^2$

ب) $\frac{x - 2}{x - 3} - \frac{x + 1}{x + 2}$

مخرج کسر اول $A(x) = (x - 3)$

مخرج کسر دوم $B(x) = (x + 3)$

مخرج مشترک $(x - 3)(x + 3)$

پ) $\frac{1}{x^2 - \lambda x} - \frac{1 + x}{x^2} + \frac{x + 2}{x - 2}$

مخرج کسر اول $= x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

مخرج کسر دوم $= x^2$

مخرج کسر سوم $= x - 2$

مخرج مشترک $x^2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

جمع دو عبارت گویا

فعالیت

صفحه ۲۳

۲۴

عبارت $P(x) = \frac{4}{x^2 + x} + \frac{x}{x^2 - 1}$ را در نظر بگیرید؛ با توجه به «کار در کلاس» قبل، مخرج مشترک این دو کسر برابر است با:

مخرج مشترک $= x(x - 1)(x + 1)$

زیرا:

$$P(x) = \frac{4}{x(x + 1)} + \frac{x}{(x - 1)(x + 1)}$$

۱. مخرج کسر اول را با مخرج مشترک مقایسه کنید. برای اینکه مخرج کسر اول مانند مخرج مشترک شود؛ باید صورت و مخرج کسر اول را در چه عبارتی ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{4}{x(x + 1)} = \frac{4(x - 1)}{x(x + 1)(x - 1)}$$

۲. برای اینکه مخرج کسر دوم مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر دوم را در کدام عبارت ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{x}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x(x)}{(x - 1)(x + 1)x}$$

۳. همان طور که می‌بینید، مخرج کسره‌های اول و دوم یکسان شده‌اند، در زیر این دو را با هم جمع کرده ایم، جای خالی را پر کنید.

$$P(x) = \frac{4(x-1) + x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{4x - 4 + x^2}{x(x-1)(x+1)}$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

کار در کلاس

صفحه ۲۳

۲۵

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

می‌دانیم مخرج مشترک این دو کسر برابر با $(x+1)(x-1)$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x^2-1}$$

ب) $\frac{y+8}{y^2+y-2} + \frac{y-2}{y^2+2y} = \frac{y+8}{(y+2)(y-1)} + \frac{y-2}{y(y+2)}$

$$= \frac{(y+8)y}{y(y+2)(y-1)} + \frac{(y-2)(y-1)}{y(y+2)(y-1)} = \frac{y^2+8y+y^2-3y+2}{y(y+2)(y-1)} = \frac{2y^2+5y+2}{y(y+2)(y-1)}$$

پ) $\frac{4+x^2-2x}{2+x} - x - 2 = \frac{4+x^2-2x}{(2+x)} - \frac{x(2+x)}{(2+x)} - \frac{2(2+x)}{(2+x)} = \frac{4+x^2-2x-2x-x^2-4-2x}{2+x} = \frac{-6x}{2+x}$

ت) $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} - \frac{2x-3}{2x+2} = \frac{2x+3}{2(x-1)} - \frac{5}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x-3}{2(x+1)}$

می‌دانیم مخرج مشترک این سه کسر برابر با: $2(x-1)(x+1)$ است بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{(2x+3)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} - \frac{5 \times 2}{2(x-1)(x+1)} - \frac{2(x-3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2+2x+3x+3-10-2x^2+2x+3x-3}{2(x-1)(x+1)} = \\ & \frac{10x-10}{2(x-1)(x+1)} = \frac{10(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x+1} \end{aligned}$$

پرسش ۱

تمرین

صفحه ۲۴

۲۶

۱. عبارت‌های گویا زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند.

الف) $\frac{x^2+1}{x^2-1} \quad x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=1$ به ازای $x=\pm 1$ تعریف نشده است. $x=-1$

ب) $\frac{2x^2+1}{x^2+4} \quad x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$ غیر ممکن $x \in \mathbb{R}$ تمام مقادیر x تعریف شده است.

پ) $\frac{5}{x^2+x} \quad x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0, \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1$ به ازای $x=0$ و $x=-1$ تعریف نشده است.

ت) $\frac{x^3+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)} \quad \left. \begin{aligned} x=0 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2, x=-2 \end{aligned} \right\}$ به ازای $x=0$ و $x=-1$ و $x=\pm 2$ تعریف نشده است.

ث) $\frac{3x^2y+6xy^2}{x^2} \quad x^2=0 \Rightarrow x=0$ به ازای $x=0$ تعریف نشده است.

ج) $\frac{4a^m - 3a^m m}{am^2 - 2a} am^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(m^2 - 2) = 0 \Rightarrow a(m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2}) = 0$. به ازای $m = \pm\sqrt{2}$ و $a = 0$ تعریف نشده است.

$$a = 0$$

$$m - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow m = \sqrt{2}$$

$$m + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow m = -\sqrt{2}$$

ج) $\frac{b^2 x^2 - ab^2 x^2}{a^2 b^2 x^2 - a^2 b^2 x} a^2 b^2 x^2 - a^2 b^2 x = 0 \Rightarrow a^2 b^2 x(x - a) = 0 \Rightarrow a^2 b^2 x = 0$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

به ازای $x = a$ یا $a = b = x = 0$ تعریف نشده است.

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

ج) $\frac{x^2 - a^2}{ax^2 - a^2 x} ax(x^2 - a^2) = 0 \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow a = 0$

$$x = 0$$

به ازای $x = a = 0$ یا $x = \pm a$ تعریف نشده است.

$$x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow (x - a)(x + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ OR \\ x = -a \end{cases}$$

پرسش ۲

تمرین

صفحه ۲۴

۲۷

۲. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^2} + 1 = \frac{4}{3(3x)} - \frac{5x}{3(2y^2)} + 1 = \frac{4(2y^2)}{3(3x)(2y^2)} - \frac{(5x)(3x)}{3(2y^2)(3x)} + \frac{3(3x)(2y^2)}{3(3x)(2y^2)} = \frac{8y^2 - 15x^2 + 18xy^2}{18xy^2}$

ب) $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$

پ) $\frac{\frac{1}{m} + 1}{\frac{m}{m+1}} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{m}{m}}{\frac{m}{m+1}} = \frac{\frac{1+m}{m}}{\frac{m}{m+1}} = \frac{1+m}{m} \cdot \frac{m+1}{m} = \frac{(1+m)(m+1)}{m^2}$

ت) $\frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{2x}{(x-y)(x+y)} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{2x + x - y - x - y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x - 2y}{(x-y)(x+y)} =$

$$\frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{x+y}$$

ث) $\frac{x+3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x} = \frac{x+3}{(x-3)^2} - \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} + \frac{5}{(x-3)} = \frac{(x+3)^2 - (x+2)(x-3) + 5(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)}$

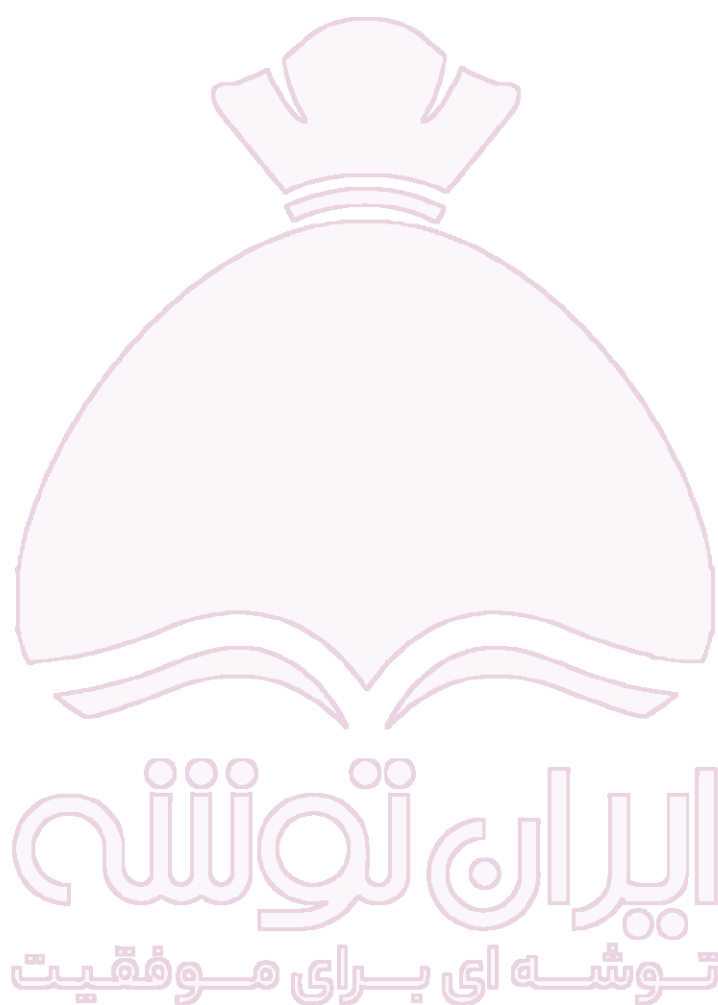
$$= \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 - x + 6 + 5x^2 - 45}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{5x^2 + 7x - 30}{(x-3)^2(x+3)}$$

ج) $\frac{y-3}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y} = \frac{(y-2)(y-3) - (y+2)(y+2) + 2(y-2)(y+2)}{(y-2)^2(y+2)} =$

$$\frac{y^2 - 5y + 6 - y^2 - 4y - 4 + 2y^2 - 4y - 4}{(y-2)^2(y+2)} = \frac{2y^2 - 9y - 2}{(y-2)^2(y+2)}$$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



گام به گام ریاضی و آمار دهم انسانی - فصل ۲

معادله درجه دوم

فهرست

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

۵	۱	فعالیت، صفحه ۲۶ — طرح معادله از روی ترازو
۵	۲	فعالیت، صفحه ۲۶ — دو برابر یک عدد به علاوه یک و پنج برابر همان عدد منهای چهار
۶	۳	کار در کلاس، صفحه ۲۷ — معمای حواصلها
۷	۴	فعالیت، صفحه ۲۹ — عددی که مربع آن ۳ برابر خودش است
۸	۵	فعالیت، صفحه ۲۹ — مساحت شکل برابر با محیط آن
۸	۶	کار در کلاس، صفحه ۳۰ — سن نیما و کیان
۹	۷	تمرین، صفحه ۳۰ — تبدیل عبارت‌ها به معادله
۹	۸	تمرین، صفحه ۳۰ — حقوق مهندس، تکنسین و مدیر بخش
۹	۹	تمرین، صفحه ۳۰ — تولید فولاد ذوب آهن اصفهان
۱۰	۱۰	تمرین، صفحه ۳۰ — مجموع مساحت‌های سه شکل
۱۰	۱۱	بازی با حروف الفبا به کمک مدل‌سازی ریاضی (رمزنگاری)، صفحه ۳۰ — رمزنگاری با معادله ریاضی
۱۱	۱۲	تمرین، صفحه ۳۰ — قالی با ابعاد $2/80$ در $1/10$ متر

درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

۱۲	۱۳	فعالیت، صفحه ۳۵ — تکمیل تساوی‌ها با اتحادها
۱۴	۱۴	فعالیت، صفحه ۳۶ — وصل کردن اتحاد مناسب به معادله و حل آن
۱۵	۱۵	کار در کلاس، صفحه ۳۷ — حل معادله با اتحادها

۱۵	تمرین، صفحه ۳۷ — حل معادله‌های درجه دوم
۱۷	تمرین، صفحه ۳۷ — مربع با سه شکل بریده شده
۱۸	تمرین، صفحه ۳۷ — معادله درجه دومی با دو ریشه مشخص
۱۸	تمرین، صفحه ۳۷ — معادله با ریشه مضاعف ۱
۱۸	تمرین، صفحه ۳۷ — تعداد ریشه‌های معادله شامل پارامتر K
۱۹	تمرین، صفحه ۳۷ — تابلوی راهنمایی «یک طرفه» و هزینه برچسب‌ها
۲۱	کار در کلاس، صفحه ۴۲ — مسابقه پله‌ها؛ حل معادله با تکمیل مربع
۲۲	تمرین، صفحه ۴۳ — حل با روش تشکیل مربع کامل
۲۳	فعالیت، صفحه ۴۴ — فرمول دلتا و ریشه‌های معادله درجه دوم
۲۳	کار در کلاس، صفحه ۴۵ — مجموع ریشه‌ها و ضرایب معادله

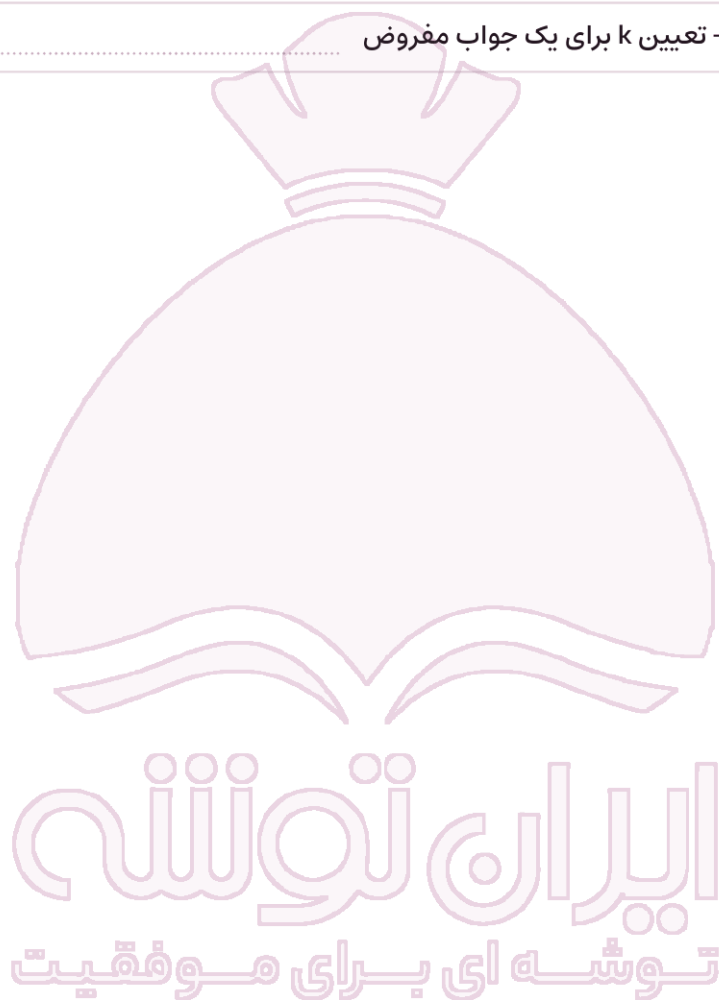
طرح و حل چند مسأله کاربردی از معادله درجه دو

۲۴	مسئله اول — تابع هزینه، درآمد و سود؛ تولید دوچرخه
۲۵	مسئله دوم — سود کارگاه تولید چتر؛ نقطه سر به سر
۲۶	تمرین، صفحه ۴۷ — حل معادله‌های درجه دوم با دلتا (۱ تا ۳)
۲۸	تمرین، صفحه ۴۷ — حاصل ضرب ریشه‌ها در یک معادله درجه دوم
۲۸	تمرین، صفحه ۴۷ — یافتن جواب دیگر معادله از روی یک جواب
۲۹	تمرین، صفحه ۴۷ — مساحت مثلث و مستطیل برابر است
۲۹	تمرین، صفحه ۴۷ — معادله‌ای که به ازای هر مقدار a جواب حقیقی دارد
۳۰	تمرین، صفحه ۴۷ — رابطه ضرایب و ریشه‌ها وقتی b برابر a به علاوه c است
۳۰	تمرین، صفحه ۴۷ — حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم
۳۰	تمرین، صفحه ۴۷ — رابطه ضرایب و ریشه‌ها وقتی مجموع ضرایب صفر است

درس سوم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

۳۱	فعالیت، صفحه ۴۸ — زمان رسیدن علی به مدرسه
۳۲	مثال — معادله با ریشه غیرقابل قبول

۳۲		مثال — معادله گویا با دو ریشه	۳۸
۳۳		مثال — تعیین پارامتر a برای یک جواب مفروض	۳۹
۳۳		کار در کلاس، صفحه ۵۰ — حل معادله های گویا (الف تا ث)	۴۰
۳۴		تمرین، صفحه ۵۲ — حل معادله های گویا (۱: الف تا ج)	۴۱
۳۶		تمرین، صفحه ۵۲ — مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی	۴۲
۳۶		تمرین، صفحه ۵۲ — دو چاپگر و فیش حقوق کارگران	۴۳
۳۷		تمرین، صفحه ۵۲ — تعیین k برای یک جواب مفروض	۴۴



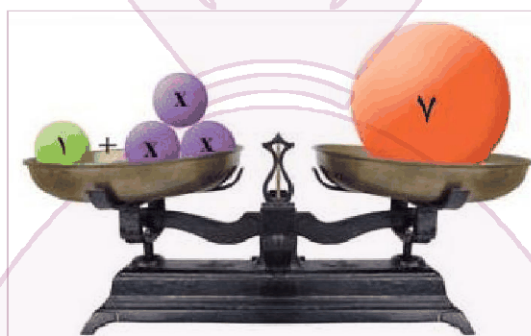
درس اول: معادله و مسائل توصیفی

فعالیت

صفحه ۲۶

۱

با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



عددی را بیابید که سه برابر آن به علاوه‌ی عدد یک، برابر با هفت باشد؟

$$3x + 1 = 7 \Rightarrow 3x = 7 - 1$$

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

فعالیت

صفحه ۲۶

۲

عددی بیابید که دو برابر آن به علاوه‌ی عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب: عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:

دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل $2x + 1$ و پنج برابر همان عدد منهای چهار معادل $5x - 4$ است که باید با یکدیگر برابر باشند یعنی:

$$2x + 1 = 5x - 4$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه جواب معادله به دست می‌آید:

$$x = \frac{5}{3}$$

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است را یک معادله درجه اول می‌نامند. جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (چرا؟)

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

اگر در معادله به جای x ، $-\frac{b}{a}$ را قرار دهیم حاصل تساوی صفر می‌شود.

کار در کلاس

صفحه ۲۷

۳

یک حواصیل خاکستری دسته‌ای از حواصیل‌های سفید را در جنگل حرا در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می‌دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد:

«ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم.»

لطفاً به پرنده کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را x فرض کنیم:

ما + ما + نصف ما + نصف نصف ما + ۱ = ۱۰۰

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$$

$$2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 99 \Rightarrow \frac{11}{4}x = 99 \Rightarrow x = \frac{4 \times 99}{11} = 36$$

آیا معادله به دست آمده از درجه اول است؟ چرا؟

بله، چون بزرگترین درجه x از درجه یک می‌باشد.

ضرایب a و b کدام‌اند؟

$$11x - 99(\times 4) = 0 \Rightarrow 11x - 396 = 0 \Rightarrow a = 11, b = 396$$

فعالیت

صفحه ۲۹

۴

۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

اگر عدد مورد نظر x فرض شود، مربع همان عدد برابر x^2 و سه برابر همان عدد برابر $3x$ است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی:

$$x^2 = 3x$$

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟

بله می‌توانیم حدس بزنیم. بله دو جواب دارد: ۰ و ۳

از میان مقادیر زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟

$x = 3$	$x = 4$	$x = -3$	$x = 1$	$x = 0$
x	x	x	x	✓

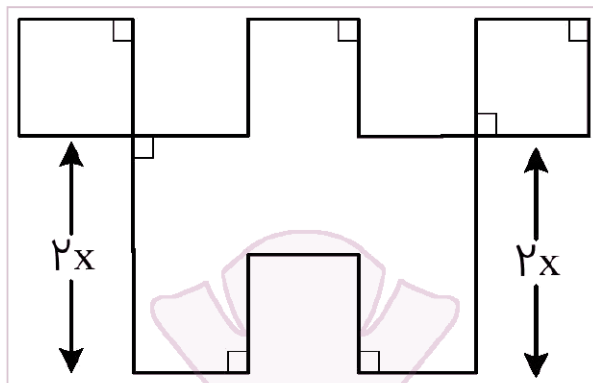
به جز روش حدس برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$x^2 = 3x \text{ یا } x = 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0, \quad x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن $a \neq 0$ ، ضریب x^2 ، b ضریب x و c عدد ثابت است.

ایران نوین
توشه‌ای برای موفقیت

۲. در شکل زیر طول تمام پاره خط‌ها به جز دو پاره خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد. مقدار x را به دست آورید.



اندازه مساحت شکل = اندازه محیط شکل

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 2x^2 + 2x^2 + 2x^2 &= 4x + 4x + 14x \Rightarrow \\ 8x^2 = 22x &\Rightarrow 4x^2 = 11x \Rightarrow 4x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x(4x - 11) = 0 \\ 4x - 11 = 0 &\Rightarrow x = \frac{11}{4} \quad \text{غ ق } x = 0 \end{aligned}$$

نیما از پسر عمویش کیان، سه سال بزرگتر است. اگر حاصل ضرب سن‌های این دو ۴۰ باشد، پسر عموی کوچکتر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر است. بنابراین: سن کیان $x - 3$

$$x \times (x - 3) = 40 \Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 5) = 0$$

توشه‌ای برای موفقیت
غ ق $x = -5$ سن نیما $x = 8$

آیا می‌توانید جواب‌های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟

بله، می‌شود حدس زد البته کمی شاید حدس زدن مشکل به نظر برسد ۸ و ۵ دو عدد هستند که حاصل ضربشان ۴۰ و یکی از دیگری ۳ واحد بزرگتر است، این معادله از درجه ۲ می‌باشد.

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می‌کند؟ آیا این جواب در این سوال معنی دارد؟

دو جواب دارد- بله صدق می‌کند- خیر معنی ندارد زیرا سن نمی‌تواند یک عدد منفی باشد.

۱. هر کدام از عبارتهای زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.

$$5x + 2 = 3x - 2$$

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه یک است.

$$x^2 = x + 1$$

۲. در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن‌ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵,۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

حقوق مهندس $x =$ ، حقوق تکنسین $y =$ ، حقوق مدیر $z =$

$$x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \quad x = \frac{2}{3}z \Rightarrow z = \frac{3}{2}x \quad 3z + 8x + 12y = 55.5 \Rightarrow$$

$$3 \times \left(\frac{3}{2}x\right) + 8x + 12\left(\frac{x}{2}\right) = 55.5 \Rightarrow \frac{9x + 28x}{2} = 55.5 \Rightarrow 37x = 111 \Rightarrow$$

$$x = \frac{111}{37} = 3 \Rightarrow y = 1.5$$

حقوق تکنسین ۱/۵ میلیون تومان است.

۳. با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	
x	$+ 2x$	$+ 4x$	$+ 8x$	$+ 16x$	$= 31x$

$$16x = 64 \Rightarrow x = 4$$

$$4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$$

۱۲۴ هزار تن مجموع تولید فولاد در این پنج روز بوده است.

اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

$$60 = 64 - 4 \text{ هزار تن}$$

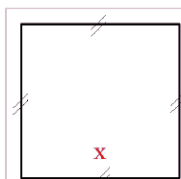
۶۰ هزار تن اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه بوده است.

تمرین

صفحه ۳۰

۱۰

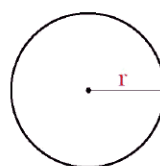
۴. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

$$x^2 + \frac{x^2}{4} + \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \right)^2 = 7 \Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 7 \Rightarrow$$

$$7x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$x = -2$ غ ق $x = 2$ طول ضلع مربع

بازی با حروف الفبا به کمک مدل‌سازی ریاضی (رمزنگاری)

صفحه ۳۰

۱۱

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می‌شود. حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص شده‌اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود. زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $4x^2$ مشخص می‌شود زیرا چهارمین حرف الفبا است ($a = 4$) و دارای دو نقطه است ($n = 2$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می‌کنیم. مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

ه	چ	ن	غ
۳۱	$7x^3$	$29x$	$22x$

غنچه ← معادل ریاضی ← $22x + 29x + 7x^3 + 31$

حال با توجه به توضیح فوق: الف) جدول زیر را کامل کنید:

کلمه به زبان فارسی	مدل ریاضی معادل آن
آب	$1 + 2x$
پا	$3x^3 + 1$
ذرت	$11x + 12 + 4x^2$

ب) مدل ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.

ر	ح	م	ت				
↑	↑	↑	↑				
۱۲	۸	۲۵	$4x^2$				
پ	ی	ا	م	ب	ر		
↑	↑	↑	↑	↑	↑		
$3x^2$	$+32x^2$	$+1$	$+28$	$+2x$	$+14$		
						$4x^2 + 48$	
						رحمت	

پ) آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

بله به عهده دانش آموز

ت) با مدل فوق یک پیام کوتاه برای دوستت بنویسید.

به امید صلح در تمام دنیا

$2x$	$+31$	۱	$+28$	$+32x^2$	$+10$	۱۷	$+37$	$+8$	۱۰	$+12$
ب	ه	ا	م	ی	د	ص	ل	ح	د	ر
$4x^2$	$+28$	$+1$	$+28$			۱۰	$+29x$	$+32x^2$	$+1$	
ت	م	ا	م			د	ن	ی	ا	

تمرین

صفحه ۳۰

۱۲

۶. اگر در یک قالی با ابعاد $2/80m \times 2/10m$ (که عموماً 2×3 نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی ۵/۸۸۰/۰۰۰ عدد باشد:

الف) این قالی چند رج است؟

$$2/80 \text{ m} \times 2/10 \text{ m} = \frac{280}{7} \times \frac{210}{7} = 1200$$

$$7 \times 7 = \frac{5880000}{1200} = 4900 \text{ تعداد گره‌ها در یک مربع}$$

$$x \times x = 4900 \Rightarrow x \pm 70 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -70 \\ x = 70 \end{cases}$$

این قالی ۷۰ رج است.

ب) اگر برای هر گره ۱cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟

$$m = 58/800 \text{ cm} = 5880000 \text{ cm} = 5880000 \times 1 \text{ شده}$$

پ) یک قالی باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی ببافد. اگر این قالی باف ۵ روز در هفته کار کند برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

$$\text{تعداد روزهایی که بافتن قالی طول می‌کشد} = \frac{5880000}{6000} = 980 \text{ روز}$$

$$\text{تعداد هفته‌ها} = \frac{980}{5} = 196$$

ت) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و ششصد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$$\text{هزینه‌ها} - \text{قیمت فروش قالی} = \text{سود حاصل از بافتن قالی} = 29400000 - 5600000 = 23800000$$

$$\text{دستمزد هر هفته} = \frac{23800000}{196} = 121428 \text{ تومان}$$

$$\text{دستمزد بافنده به ازای هر روز} = \frac{121428}{5} = 24285 \text{ تومان}$$

درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

توشه‌ای برای موفقیت

فعالیت

صفحه ۳۵

۱۳

طرف دوم تساوی‌های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده (مربع دو جمله‌ای، مزدوج و جمله مشترک) کامل کنید:

(الف)

$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$

(ب)

$$(۲ + ۳xy)^۲ = ۴ + ۱۲xy + ۹x^۲y^۲$$

(پ)

$$(x - ۲y)(x + ۲y) = x^۲ - ۴y^۲$$

(ت)

$$x^۲ - ۸x + ۱۲ = (x - ۶)(x - ۲)$$

(ث)

$$\left(x - \frac{۳}{۲}\right)^۲ = x^۲ + \frac{۹}{۴} - ۳x$$



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل نمایید.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
اتحاد مربع تفاضل دو جمله	$x^2 + 6x = 0$	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0$ $\Rightarrow x = 0$ یا $x = -6$ پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
عامل یابی (فاکتورگیری)	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x + 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = -3$
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 16 = 0$	روش ۱: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 4) = 0$ $\Rightarrow x = 4$ یا $x = -4$ روش ۲: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
اتحاد مربع مجموع دو جمله	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$(x + 3)(x + 2) = 0$ $\Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
اتحاد مزدوج و روش ریشه گیری	$x^2 - 10x + 25 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow$ $(x - 5)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x - 5)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5 \quad \text{OR} \quad x = 5$

۱. با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

الف) اگر $c = 0$ از کدام روش بالا استفاده می کنید؟

روش فاکتورگیری (تجزیه)

ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله ای استفاده می کنید؟

هرگاه سه جمله داشته باشیم که دو جمله آن مربع کامل باشند و حاصل دو برابر یکی از دو جمله در دیگری نیز وجود داشته باشد.

پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه گیری، b در چه شرطی صدق می کند؟ آیا

علامت های a و c مهم است؟

ضریب b باید صفر باشد a و c مختلف علامه باشند.

ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله ریشه مضاعف محسوب می شود؟

اتحادهای مربع مجموع یا تفاضل دو جمله

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \quad , \quad x^2 - 10x + 25 = 0$$

در یک معادله درجه ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند اصطلاحاً می گوییم، معادله ریشه مضاعف است.

۲. آیا می توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 + x + 3 = 0$$

کار در کلاس

صفحه ۳۷

۱۵

با استفاده از اتحادهای بالا معادلات زیر را حل کنید:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (1)$$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید.

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x = -4 \text{ OR } (x + 4) = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ یا } (x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$4x^2 - (2 - x)^2 = 0 \quad (2)$$

با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ تساوی را تجزیه می کنیم:

$$(2x - (2 - x))(2x + (2 - x)) = 0 \Rightarrow (2x - 2 + x)(2x + 2 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$(3x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

تمرین

صفحه ۳۷

۱۶

معادله های زیر را حل کنید.

$$2x^2 - 8 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 2(x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

ب) $(x + 2)(x - 3) = x - 3$

$$(x + 2)(x - 3) = x - 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پ) $x^4 - 2x^2 = 0$

$$x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

* اگر عبارتی با توان ۲ برابر صفر باشد، خود آن عبارت را می‌توان مساوی صفر قرار داد.

ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2 = 4x - 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

$$(2x - 1)(2x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ث) $2x^2 - 8x = 0$

$$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{OR} \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

توشه‌ای برای موفقیت

ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

چ) $\frac{x^2}{3} = x$

$$\frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{OR} \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

ج) $x^2 = 5 - x^2$

$$x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (3x + 2)(3x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ز) $(x - 3)^2 = 4$

$$(x - 3)^2 = 4 \Rightarrow (x - 3) = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 2 + 3 \Rightarrow$$

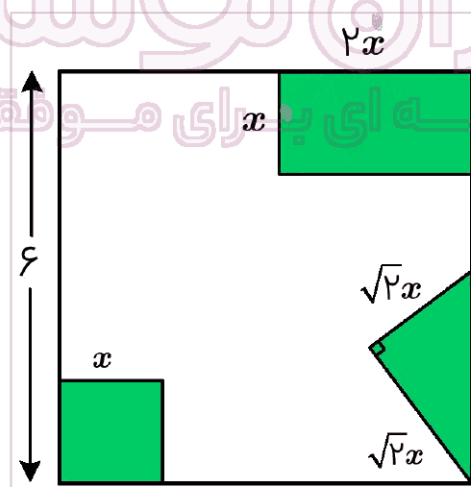
$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

تمرین

صفحه ۳۷

۱۷

۲. از مربعی به ضلع 6cm سه شکل روبه رو بریده شده است. مساحت باقی مانده 24cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟



(مساحت قسمت‌های هاشور خورده - مساحت کل مربع = مساحت ناحیه سفید)

(مساحت مستطیل + مساحت مربع + مساحت مثلث قائم الزاویه) - مساحت کل مربع =

$$24 = 6^2 - (x \times 2x + x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{2}x \times \sqrt{2}x)$$

(در عبارت داخل پرانتز، به ترتیب: مساحت مستطیل، مساحت مربع، مساحت مثلث)

$$24 = 36 - (2x^2 + x^2 + x^2) \Rightarrow 24 = 36 - 4x^2 \\ \Rightarrow 4x^2 = 36 - 24 \Rightarrow 4x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = +\sqrt{3}$$

تمرین

صفحه ۳۷

۱۸

۳. معادله درجه دومی بنویسید که $x = 2$ ، $x = -3$ جواب‌های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$$

$$x = -3 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

خیر، منحصر به فرد نیست، مثلاً:

$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$

تمرین

صفحه ۳۷

۱۹

۴. معادله درجه دومی بنویسید که $x = 1$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$$x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0, (2x - 2)^2 = 0$$

خیر منحصر به فرد نیست، مثلاً:

تمرین

صفحه ۳۷

۲۰

۵. در معادله $(x - 1)^2 = K$:

(الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K = 2$ ، $K = 4$ ، $K = 0$ و $k = -9$ به دست آورید.

$$K = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$K = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 = 4 \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1 \pm 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$K = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

سمت چپ تساوی با توجه به توان زوج یک عبارت همواره مثبت می‌باشد در حالی که سمت راست یک عدد منفی قرار گرفته است و این غیر ممکن است.

(ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه مضاعف دارد؟

به ازای $K = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد.

(پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه حقیقی دارد؟

به ازای $K > 0$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.

(ت) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟

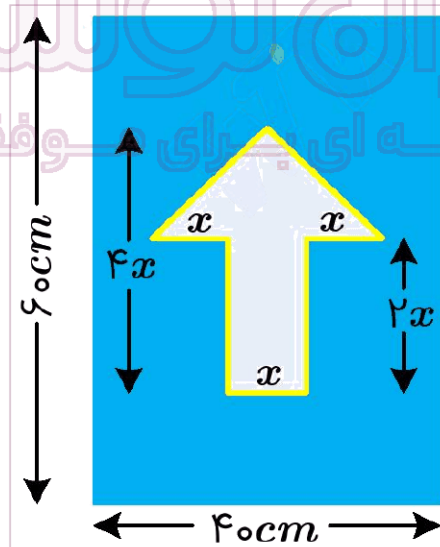
به ازای $K < 0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

تمرین

صفحه ۳۷

۲۱

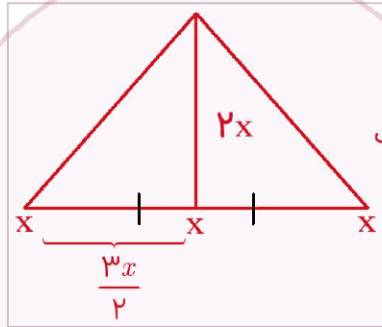
۶. برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» بر روی یک پل، مطابق شکل زیر از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه 1 cm^2 برچسب سفید ۳۰ تومان و هزینه 1 cm^2 برچسب آبی ۱۰ تومان است. مجموع هزینه برچسب‌های سفید و آبی ۲۷۰۰۰ تومان شده است.



الف) اندازه x چقدر است؟

$$\begin{aligned}
 \text{مساحت قسمت سفید} &= \text{مساحت مستطیل} + \text{مساحت مثلث} = (2x \times x) + \frac{1}{2}(3x)(2x) \\
 &= 2x^2 + 3x^2 = 5x^2 \text{ مساحت قسمت سفید} \\
 \text{مساحت قسمت آبی} &= \text{مساحت کل} - \text{مساحت قسمت سفید} = 2400 - 5x^2 \\
 \text{هزینه برچسب سفید} &= 150x^2 = 5x^2 \times 30 \\
 \text{هزینه برچسب آبی} &= (2400 - 5x^2) \times 10 = 24000 - 50x^2 \\
 \text{هزینه کل} &= 150x^2 + 24000 - 50x^2 = 27000 \Rightarrow 100x^2 = 3000 \\
 &\Rightarrow x^2 = \frac{3000}{100} = 30 \Rightarrow x = \sqrt{30} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل رو به رو از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه آن ۱۰۰ تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلو ۳۴۸۰۰ تومان می‌شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟



$$\begin{aligned}
 \text{وتر}^2 &= \text{فیتاغورث} = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (2x)^2 = \frac{9}{4}x^2 + 4x^2 = \frac{25x^2}{4} \Rightarrow \text{طول وتر} = \frac{5}{2}x \\
 \text{طول برچسب زرد} &= x + 2x + x + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x + x + 2x = 12x \\
 \text{هزینه برچسب زرد} &= 12x \times 100 = 1200x \\
 \text{هزینه رنگ آمیزی تابلو} &= \text{هزینه برچسب آبی} + \text{هزینه برچسب سفید} + \text{هزینه برچسب زرد} = 34800 \\
 (24000 - 50x^2) &+ (150x^2) + 12x \times 100 = 34800 \\
 100x^2 + 1200x - 10800 &= 0 \Rightarrow (\div 100) \quad x^2 + 12x - 108 = 0 \\
 (x + 18)(x - 6) &= 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + 18 = 0 \rightarrow x = -18 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$$

با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

$$۲x^۲ - ۶x - ۱ = ۰ \quad (۱)$$

تمرین قبل از مسابقه

Step 1: $۲x^۲ - ۶x = ۱$

Step 2: $x^۲ - ۳x = \frac{1}{۲}$

Step 3: $x^۲ - ۳x + \frac{9}{۴} = \frac{1}{۲} + \frac{9}{۴}$

Step 4: $(x - \frac{3}{۲})^۲ = \frac{11}{۴}$

Step 5: $x - \frac{3}{۲} = \pm \frac{\sqrt{11}}{۲}$
 $\begin{cases} x - \frac{3}{۲} = + \frac{\sqrt{11}}{۲} \\ x - \frac{3}{۲} = - \frac{\sqrt{11}}{۲} \end{cases}$

$$۳x^۲ - ۲ = ۶x \quad (۲)$$

مسابقه

Step 1: $۳x^۲ - ۶x = ۲$

Step 2: $x^۲ - ۲x = \frac{۲}{۳}$

Step 3: $x^۲ - ۲x + ۱ = \frac{۲}{۳} + ۱$

Step 4: $(x - 1)^۲ = \frac{۵}{۳}$
 $x - 1 = \pm \sqrt{\frac{۵}{۳}}$
 $\begin{cases} x = \frac{۳ + \sqrt{۱۵}}{۳} \\ x = \frac{۳ - \sqrt{۱۵}}{۳} \end{cases}$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



معادلات درجه دو زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = -6$

$$x^2 - 5x = -6 \Rightarrow x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\ x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

ب) $9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 3x = 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9}$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{36}\right)$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36} \Rightarrow$$

$$x + \frac{1}{6} = \pm \frac{\sqrt{5}}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{6} \\ x = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{6} \end{cases}$$

پ) $x^2 + \frac{1}{4} = -x \Rightarrow x^2 + x = -\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ریشه مضاعف

ت) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$(x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

ریشه مضاعف

۱. جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $a = 1$ و $b = -3$ ، $c = 2$ است. بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

پس معادله دارای دو جواب است $\Delta > 0$

$$x = 1 \text{ یا } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2$$

۲. جواب‌های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن: $a = 4$ ، $b = 7$ ، $c = -2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} =$$

$$\begin{cases} \frac{-7 + 9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \frac{-7 - 9}{8} = \frac{-16}{8} = -2 \end{cases}$$

۳. جواب‌های معادله $3x^2 + x + 7 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن: $a = 3$ ، $b = 1$ ، $c = 7$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(3)(7) = 1 - 84 = -83$$

$\Delta < 0$ بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

نوشته‌ای برای موفقیت

معادله‌های زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a ، b و c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

$$\text{الف) } 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(3)(-2) \Rightarrow \Delta = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2(3)} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$(b) \quad 4x^2 + 3x - 7 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(4)(-7) \Rightarrow \Delta = 9 + 112 = 121 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 11}{8} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$$

بله، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ می‌باشد.

طرح و حل چند مسأله کاربردی از معادله درجه دو

مسئله اول

۲۶

مقدمه: در هر مسأله اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می‌شوند:

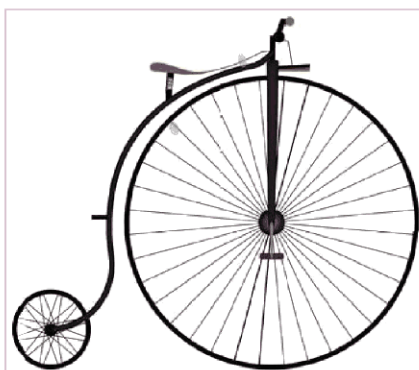
تابع هزینه: $C(x)$ یا (cost) هزینه تولید x واحد کالا

تابع سود: $P(x)$ یا (profit) سود حاصل از فروش x واحد کالا

تابع درآمد: $R(x)$ یا (Revenue) درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$$\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x) \quad \text{سود} = \text{درآمد (فروش)} - \text{هزینه}$$



فرض کنید شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده‌اید و پس از آزمایش‌ها و تأییدهای اولیه می‌خواهید اقدام به تولید انبوه این دوچرخه کنید.

هزینه‌های شما شامل ۲ بخش هستند:

۱- هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه‌های کارخانه و تبلیغات.

۲- هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.

اگر ۷ قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه $۷۰/۰۰۰ - ۲۰۰۷$ به دست آید:

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می‌شود؟

حل:

$$\text{درآمد} = R(x) = \text{قیمت هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه} = xv = (70/000 - 2007)(x)$$

$$\text{هزینه} = C(x) = \text{هزینه اولیه} + \text{هزینه تولید هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه}$$

$$= 7000000 + 110(70000 - 2007)$$

$$= 7000000 + 7700000 - 220007$$

$$\text{سود} = P(x) = \text{درآمد} - \text{هزینه} = R(x) - C(x)$$

$$= 70,000x - 2007^2 - (14,700,000 - 22,0007)$$

$$= 70,000x - 2007^2 - 14,700,000 + 22,0007$$

$$= -2007^2 + 92,0007 - 147,700,000$$

مسئله دوم

۲۷

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطه به دست می‌آید.



الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد چقدر از دست می‌دهد؟

$$\text{چتر نفروشد} \rightarrow x = 0 \rightarrow P(0) = -100$$

ب) نقطه سر به سر (break-even) میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی را نشان می‌دهد که در آن میزان هزینه‌ها با میزان درآمدها برابر می‌شود و بنگاه در این سطح از تولید نه سود می‌کند و نه ضرر. اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر باشد بنگاه سود خواهد برد و اگر کمتر باشد، زیان خواهد دید. در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می‌رسد؟ چندمین تولید چتر برای کارگاه سودآور است؟

$$\rightarrow P(x) = 0 \rightarrow -0.00405x^2 + 8/15x - 100 = 0 \text{ نه سود و نه ضرر}$$

$$\Delta = (8/15)^2 - 4(-0.00405)(-100) = 8/05$$

$$x = \frac{-8/15 \pm \sqrt{8/05}}{2(-0.00405)} =$$

$$\begin{cases} 2000 \\ 12/3 \end{cases}$$

۱۲/۳ قابل قبول نیست، زیرا تعداد چتر باید یک عدد طبیعی باشد.

تمرین

صفحه ۴۷

۲۸

۱. معادله‌های درجه دوم زیر را حل کنید.

$$x^2 - x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$a = 1 \quad b = -1 \quad c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(5) = 1 - 20 = 19 < 0 \quad \Delta < 0$$

چون Δ منفی است معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad (2)$$

$$a = 2 \quad b = 1 \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} =$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-1 - 3}{4} = -1 \end{cases}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (3)$$

$$a = 4 \quad b = -4 \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

معادله ریشه مضاعف دارد.

$$x^2 + 17x - 18 = 0 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad b = 17 \quad c = -18$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (17)^2 - 4(1)(-18) = 289 + 72 = 361 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17 \pm \sqrt{361}}{2(1)} = \frac{-17 \pm 19}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-17 + 19}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-17 - 19}{2} = \frac{-36}{2} = -18 \end{cases}$$

$$3x^2 - x + 4 = 0 \quad (5)$$

$$a = 3 \quad b = -1 \quad c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(3)(4) = -47 < 0$$

چون Δ منفی است معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (6)$$

$$a = 1 \quad b = \sqrt{3} \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4(1)(-1) = 3 + 4 = 7$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2(1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} \\ x_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲. معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را به دست آورید.

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = -5 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

چون یک جواب معادله -4 است، پس می‌توانیم عدد -4 را به جای x جایگزین کنیم.

$$x = -4 \Rightarrow 2(-4)^2 - (-4)a + 28 = 0 \Rightarrow 32 + 4a + 28 = 0 \Rightarrow 4a = -28 - 32$$

$$4a = -60 \Rightarrow a = -\frac{60}{4} = -15$$

پس معادله به صورت $2x^2 - (-15)x + 28 = 0$ تبدیل می‌شود:

$$2x^2 - (-15)x + 28 = 0 \Rightarrow$$

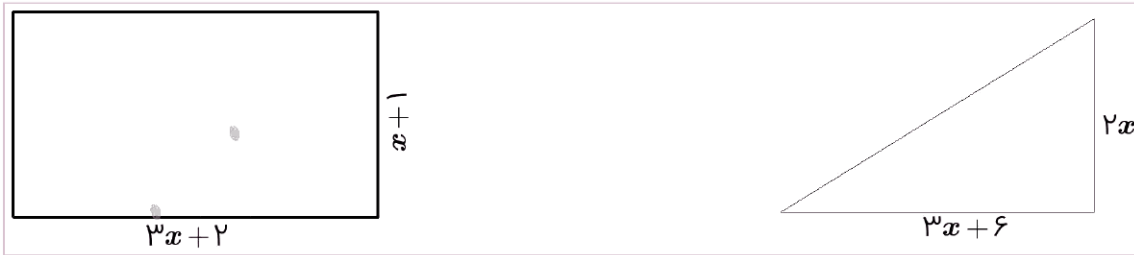
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 15 \\ c = 28 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (15)^2 - 4(2)(28) = 225 - 224 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-15 \pm 1}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-15 + 1}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2} \\ \frac{-15 - 1}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

۴. در زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم شده مساوی هستند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



$$(x+1)(3x+2) = \frac{(3x+6)(2x)}{2} \Rightarrow 3x^2 + 2x + 3x + 2 = 3x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow 5x + 2 = 6x \Rightarrow x = 2$$

$$x + 1 = 2 + 1 = 3 \text{ عرض مستطیل}$$

$$3x + 2 = 3(2) + 2 = 8 \text{ طول مستطیل}$$

۵. کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^2 + ax - 1 = 0$

$$a = 1 \quad b = a \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(1)(-1) \Rightarrow a^2 + 4 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

بنابراین همواره دارای جواب‌های حقیقی است.

ب) $x^2 - x + a = 0$

$$a = 1 \quad b = -1 \quad c = a$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(a) \Rightarrow 1 - 4a$$

$$1 - 4a \geq 0 \Rightarrow -4a \geq -1 \Rightarrow 4a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4}$$

بستگی به مقدار a دارد اگر $a \leq \frac{1}{4}$ انتخاب شود جواب حقیقی وجود دارد در غیر این صورت جواب حقیقی

ندارد.

۶. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $b = a + c$ باشد. یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -\frac{c}{a}$ و دیگری $x = -1$ است.

$$ax^2 + (a + c)x + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a+c) \pm (a-c)}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-a - c + a - c}{2a} = -\frac{c}{a} \quad x_2 = \frac{-a - c - a + c}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1$$

۷. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

۸. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a + b + c = 0$) یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

$$a + b + c = 0 \Rightarrow b = -a - c \quad ax^2 + (-a - c)x + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-a - c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a - c) \pm \sqrt{(a - c)^2}}{2a} = \frac{a + c \pm (a - c)}{2a}$$

$$x_1 = \frac{a + c + a - c}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1 \quad x_2 = \frac{a + c - a + c}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

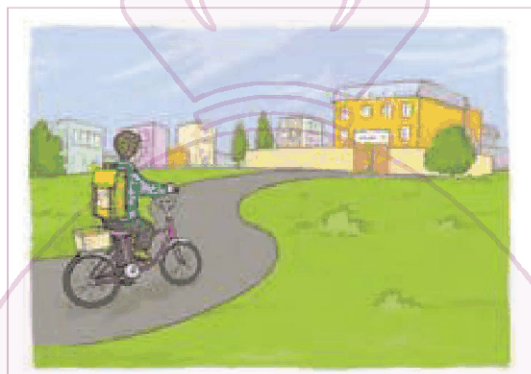
درس سوم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

فعالیت

صفحه ۴۸

۳۶

علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود، او از درب منزل تا سر خیابان اصلی ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد را محاسبه کنیم.



۱. دستور محاسبهٔ سرعت متوسط $v = \frac{x}{t}$ است که در آن v سرعت متوسط، x مسافت طی شده و t مدت زمان طی مسیر می‌باشد. داده‌های مسأله را در این دستور جایگزین کنید.

۲. برابری $15 = \frac{2/5}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا است. از آنجا که $t \neq 0$ ، پس معادله با معناست، برای حل این معادله، دو طرف را با ۱۵- جمع کنید.

۳. با مخرج مشترک گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

۴. کسری که مخرج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین صورت کسر بالا را برابر با صفر قرار دهید.

۵. از این جا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می‌آید، آن را حل کنید و مقدار t را محاسبه نمایید.

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

$$15t = 2/5 \quad \text{زمان بر حسب ساعت} \quad t = \frac{2/5}{15} = \frac{1}{6}$$

$$\text{زمان بر حسب دقیقه } t = \frac{1}{6} \times 60 = 10 \quad \text{زمان حل } 10 + 4 = 14 = \text{دقیقه}$$

مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه ۱۴ دقیقه می باشد.

برای حل معادله های شامل عبارت های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت های معادله و مخرج مشترک گیری، معادله ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می آید. با این شرط که $Q(x) \neq 0$ ، وقتی $P(x) = 0$ ، معادله جواب دارد که سپس ریشه های این معادله را به دست می آوریم. از بین ریشه های به دست آمده، آنهایی را قبول می کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟)

مثال

۳۷

مثال: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{(x-3)} = 0 \Rightarrow \frac{10 - 5x + 5 - 2x + 6}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{21 - 7x}{x-3} = 0$$

مشاهده می کنیم که به معادله ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ رسیدیم، بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه های معادله را در صورت وجود پیدا می کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x = 3$ مخرج کسرها را صفر می کند، بنابراین، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

البرار بنو زینب
توشه ای برای موفقیت

مثال

۳۸

مثال: معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} &= \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{(x-5)(x+4)} + \frac{(x-1)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 8 + x^2 - 6x + 5 - x^2 + 6x - 5}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$x = -4$ غیر قابل قبول است.

مثال

۳۹

مثال: به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است.

حل: $x=1$ را در معادله قرار می‌دهیم و سپس مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1)}{(a+1)} - \frac{2}{a+1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + a - 2}{a+1} = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

چون $a=1$ یا $a=-2$ مخرج کسرهای معادله $\frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0$ را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل قبول‌اند.

کار در کلاس

صفحه ۵۰

۴۰

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $1 + \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x}$

$$\frac{1(x^2)}{x^2} + \frac{8}{x^2} - \frac{4(x)}{x(x)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 8 - 4x}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$a=1, \quad b=-4, \quad c=8 \quad \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(8) = 16 - 32 = -16 < 0$$

ب) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

$$\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6 - x^2 + 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{4x - 2}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پ) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

$$\begin{aligned} \frac{24}{10+m} + 1 - \frac{24}{10-m} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{24(10-m)}{(10+m)(10-m)} + \frac{(10+m)(10-m)}{(10+m)(10-m)} - \frac{24(10+m)}{(10-m)(10+m)} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{240 - 24m + 100 - m^2 - 240 - 24m}{(10+m)(10-m)} &= 0 \Rightarrow \frac{-m^2 - 48m + 100}{(10+m)(10-m)} = 0 \\ \Rightarrow -m^2 - 48m + 100 &= 0 \Rightarrow m^2 + 48m - 100 = 0 \\ (m + 50)(m - 2) &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m + 50 = 0 \Rightarrow m = -50 \\ m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} &= 1 - \frac{y-1}{3-y} \\ \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} - \frac{y-1}{y-3} - 1 &= 0 \\ \frac{(y+2)(y-3)}{(y+3)(y-3)} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} - \frac{(y-1)(y+3)}{(y-3)(y+3)} - \frac{(y+3)(y-3)}{(y+3)(y-3)} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{y^2 - y - 6 - y^2 - y^2 - 2y + 3 - y^2 + 9}{(y+3)(y-3)} &= 0 \Rightarrow \frac{-2y^2 - 3y + 6}{(y+3)(y-3)} = 0 \Rightarrow \\ -2y^2 - 3y + 6 &= 0 \Rightarrow 2y^2 + 3y - 6 = 0 \quad a=2, \quad b=3, \quad c=-6 \\ \Delta = b^2 - 4ac &= (3)^2 - 4(2)(-6) = 9 + 48 = 57 \quad y = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4} \Rightarrow \\ y_1 &= \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}, \quad y_2 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4} \end{aligned}$$

ث) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است.

$$\begin{aligned} \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} &= \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2 \times 2}{2(a-2)} + \frac{(a-2)(a-2)}{2(a-2)} - \frac{a(a-2)}{2(a-2)} \\ &= 0 \\ \Rightarrow \frac{4}{2(a-2)} + \frac{a^2 - 4a + 4}{2(a-2)} - \frac{a^2 - 2a}{2(a-2)} &= 0 \Rightarrow \frac{4 + a^2 - 4a + 4 - a^2 + 2a}{2(a-2)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{-2a + 8}{2(a-2)} &= 0 \Rightarrow -2a + 8 = 0 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

تمرین

صفحه ۵۲

۴۱

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$\frac{3x-5}{x+3} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3x-5}{x+3} - \frac{x+3}{x+3} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3x-5-x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{2x-8}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x-8=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$$

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{(3x-2)(x+3)}{x(x+3)} + \frac{(2x+5)x}{x(x+3)} - \frac{5x(x+3)}{x(x+3)} = 0$$

$$\frac{3x^2+7x-6+2x^2+5x-5x^2-15x}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow -3x-6=0 \Rightarrow -3x=6 \Rightarrow x=-2$$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3 \quad (\text{پ})$$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} - (x+3) = 0$$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} - \frac{(x+3)(x+2)}{x+2} = 0 \Rightarrow \frac{2+x-x^2-5x-6}{x+2} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4x-4}{x+2} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2-4x-4=0 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \quad (\text{ت})$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} - \frac{x-1}{x-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x(x-2)} - \frac{(1+x)(x-2)}{x(x-2)} - \frac{(x-1)x}{(x-2)x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x+2-x^2+x+2-x^2+x}{x(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4-x^2}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2} \quad (\text{ث})$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} - \frac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+3)(x-2)} - \frac{2(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-1)(x-2)} - \frac{4(x-1)(x+3)}{(x-2)(x-1)(x+3)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3x^2+3x-18-2x^2+6x-4-4x^2-8x-12}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3x^2+x-10}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0 \Rightarrow -3x^2+x-10=0$$

$$3x^2-x+10=0 \quad a=3, \quad b=-1, \quad c=10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3)(10) = 1 - 120 = -119 \quad \Delta < 0$$

معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$\frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{2 - x} = \frac{2x - 3}{x + 2} \quad (ج)$$

$$\begin{aligned} \frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x-3}{x+2} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} &= 0 \Rightarrow \frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 7x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0 \\ \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} &= 0 \Rightarrow -3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad a = -3, \quad b = 2, \quad c = -1 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta < 0$$

معادله ریشه حقیقی ندارد.

تمرین

صفحه ۵۲

۴۲

۲. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است، آن دو عدد را پیدا کنید.

$$x, \quad x+2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{2x+2}{x^2+2x} = \frac{5}{12} \Rightarrow 5x^2 + 10x = 24x + 24$$

$$5x^2 - 14x - 24 = 0$$

$$5A = (5x)^2 - 14(5x) - 120$$

$$5A(5x - 20)(5x + 6)$$

$$5A = 5(x - 4)(5x + 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x + 2 = 6 \\ 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

تمرین

صفحه ۵۲

۴۳

۳. هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتر نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند.

مدت زمانی که طول می‌کشد تا چاپگر قدیمی به تنهایی صفحات را چاپ کند x ساعت.

مدت زمان لازم برای چاپ صفحات با چاپگر جدید = $x - 3$ ساعت

مقدار صفحات چاپ شده توسط چاپگر قدیمی و جدید از کل صفحات در مدت ۱ ساعت = $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4x - 12 + 4x - x^2 + 3x}{4(x)(x-3)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 11x - 12 = 0$$

$$x^2 - 11x + 12 = 0 \quad \Delta = 121 - 48 = 73 \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{2} \approx \frac{11 + 8.54}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 9/73 \text{ hour} \\ x_2 = 1/28 \text{ hour} \end{cases}$$

تمرین

صفحه ۵۲

۴۴

۴. به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است.

$$\begin{aligned} \frac{4-t}{2-2t} &= \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68} \Rightarrow \frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-68} \Rightarrow \\ \frac{7}{8} &= \frac{27+k}{100-68} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27+k}{32} \Rightarrow 7 = \frac{27+k}{4} \Rightarrow 28 = 27+k \Rightarrow k = 1 \end{aligned}$$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی و آمار دهم انسانی - فصل ۳

تابع

فهرست

درس اول: مفهوم تابع

۵	۱	فعالیت ۰ صفحه ۵۶ — مساحت و محیط دایره؛ متغیر مستقل و وابسته
۶	۲	فعالیت ۰ صفحه ۵۶ — جدول مقادیرها و زوج‌های مرتب
۶	۳	کار در کلاس ۰ صفحه ۵۷ — رابطه خطی $y = 2x - 3$: جدول، نمودار پیکانی و مختصات
۷	۴	سؤال — رابطه $y = x^2$: جدول، نمودار پیکانی و مختصات
۹	۵	فعالیت ۰ صفحه ۵۹ — تشخیص تابع از روی نمودار پیکانی، زوج مرتب و نمودار مختصاتی
۱۲	۶	کار در کلاس ۰ صفحه ۶۱ — نمایش‌های مختلف یک تابع (جدولی، توصیفی، زوج مرتبی، مختصاتی، پیکانی)
۱۴	۷	تمرین ۰ صفحه ۶۲ — تابع‌سازی از رابطه، تشخیص تابع و محاسبه مجهول

درس دوم: ضابطه جبری تابع

۱۶	۸	فعالیت ۰ صفحه ۶۵ — دامنه، ضابطه و برد تابع
۱۸	۹	کار در کلاس ۰ صفحه ۶۶ — دامنه و برد از روی نمودار و زوج مرتب

۱۰ تمرین ۰ صفحه ۶۷ — تشخیص تابع، بُرد از روی ضابطه و نمودار ۲۱

درس سوم: نمودار تابع خطی

۱۱ فعالیت ۰ صفحه ۷۰ — طول فنر بر حسب وزنه؛ تابع خطی ۲۸

۱۲ فعالیت ۰ صفحه ۷۲ — تولید لوله‌های آبیاری؛ جدول و نمودار ۳۰

۱۳ کار در کلاس ۰ صفحه ۷۳ — تعیین ضابطه تابع خطی از دو نقطه ۳۰

۱۴ کار در کلاس ۰ صفحه ۷۳ — عمق و دمای سنگ‌ها در زیر زمین ۳۱

۱۵ کار در کلاس ۰ صفحه ۷۴ — برآورد جمعیت با مدل رشد خطی ۳۲

۱۶ کار در کلاس ۰ صفحه ۷۵ — محیط و مساحت مستطیل؛ تابع خطی ۳۳

۱۷ کار در کلاس ۰ صفحه ۷۵ — ضابطه تابع خطی گذرنده از مبدأ ۳۳

۱۸ تمرین ۰ صفحه ۷۵ — ضابطه و نمودار تابع خطی؛ کاربردها ۳۴

درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲

۱۹ فعالیت ۰ صفحه ۷۷ — میزهای جلسه با محیط ثابت؛ مساحت بر حسب ضلع ۳۷

۲۰ فعالیت ۰ صفحه ۷۸ — هزینه و سود گروه نقاشی ساختمانی ۳۸

۲۱ فعالیت ۰ صفحه ۸۰ — نمودار تابع $f(x) = x^2$ ۴۰

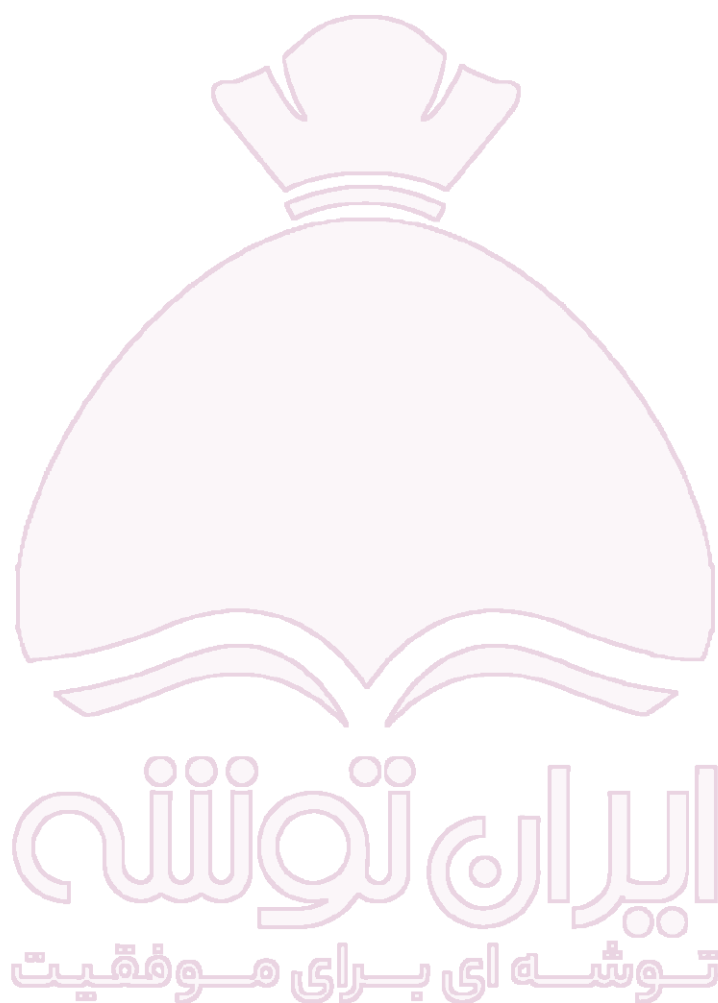
۲۲ کار در کلاس ۰ صفحه ۸۱ — نمودار تابع $f(x) = 4 - x^2$ ۴۰

۲۳ کار در کلاس ۰ صفحه ۸۱ — رأس سهمی ۴۰

۲۴ کار در کلاس ۰ صفحه ۸۲ — رسم نمودار سهمی با کمک رأس و جدول ۴۱

۲۵ کار در کلاس ۰ صفحه ۸۳ — نمودار دو تابع درجه دوم ۴۲

۲۶ تمرین ۰ صفحه ۸۴ — رسم سهمی و بیشینه‌ی سود ۴۳



درس اول: مفهوم تابع

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۱

فعالیت

صفحه ۵۶

می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi r^2$ به دست می‌آید که در این رابطه π عددی ثابت است که تقریباً $\pi = 3/14$ در نظر گرفته می‌شود و r شعاع دایره است:

۱. آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟ بله

۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟ محیط دایره $2\pi r$ می‌باشد بنابراین محیط دایره نیز تابعی از شعاع است.

۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟ شعاع دایره به صورت مستقل تغییر می‌کند بنابراین متغیر مستقل است و مساحت دایره و محیط دایره متغیر وابسته می‌باشند که این دو وابسته به تغییرات شعاع دایره می‌باشد.

۴. جدول زیر را کامل کنید.

بر حسب سانتی‌متر (شعاع) r	۱	۱/۵	۲	۳	۴
بر حسب سانتی‌متر مربع (مساحت) S	π	$2/25\pi$	4π	9π	16π
بر حسب سانتی‌متر (محیط) P	2π	3π	4π	6π	8π

در رابطه خطی $y = 3x + 1$ نیز y تابعی از تغییرات متغیر مستقل x است یعنی وقتی x را به دلخواه و مستقل، تغییر می‌دهیم، y نیز تغییر می‌کند. حال اگر x ها را روی محور افقی و y های حاصل را روی محور عمودی در نظر بگیریم به ازای هر x و y حاصل، یک نقطه در صفحه مشخص می‌شود که آن را با یک زوج به شکل (x, y) نمایش می‌دهیم، که ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را یک زوج مرتب می‌نامیم. در زوج مرتب (x, y) ، x را مؤلفه یا مختص اول و y را مؤلفه دوم می‌نامیم.

(اگر $(a, b) = (c, d)$ آنگاه $a = c$ ، $b = d$ و بر عکس اگر $a = c$ ، $b = d$ آنگاه $(a, b) = (c, d)$)

۱. جدول زیر را کامل کنید.

$$y = 3x + 1$$

۲	$\sqrt{2}$	۱	$\frac{2}{3}$	۰	-۱	x
۷	$3\sqrt{2} + 1$	۴	۳	۱	-۲	y
(۲, ۷)	$(\sqrt{2}, 3\sqrt{2} + 1)$	(۱, ۴)	$(\frac{2}{3}, 3)$	(۰, ۱)	(-۱, -۲)	(x, y)

۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^2$ تشکیل دهید.

$$y = x^2$$

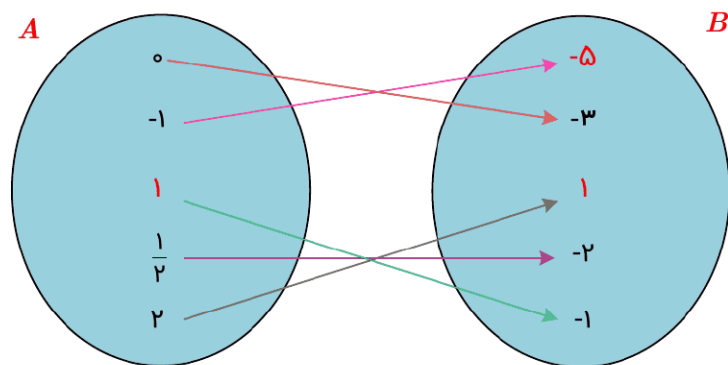
۲	۱	۰	-۱	-۲	x
۴	۱	۰	۱	۴	y
(۲, ۴)	(۱, ۱)	(۰, ۰)	(-۱, ۱)	(-۲, ۴)	(x, y)

استفاده از نمودار ون و رسم پیکان‌هایی از طرف متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می‌کند.

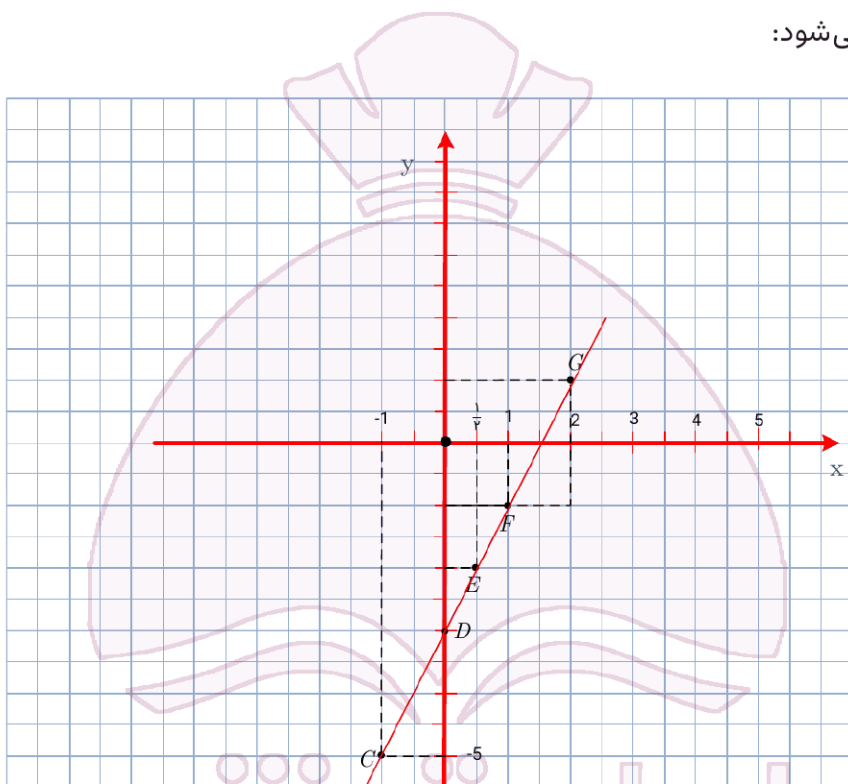
با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه $A = \{0, 1, -1, \frac{1}{2}\}$ باشند ابتدا جدول مربوط به این رابطه مشابه جدول قبل را تشکیل داده و سپس نمودار پیکانی آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید).

$$y = 2x - 3$$

۲	۱	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	x
۱	-۱	-۲	-۳	-۵	y
(۲, ۱)	(۱, -۱)	$(\frac{1}{2}, -۲)$	(۰, -۳)	(-۱, -۵)	(x, y)
G	F	E	D	C	



اگر هر یک از زوج مرتب‌های جدول فوق را یک نقطه در صفحه فرض کنیم نمودار مختصاتی رابطه خطی فوق به صورت زیر رسم می‌شود:



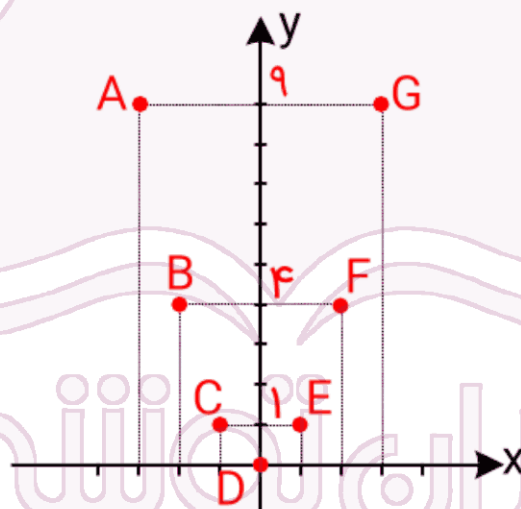
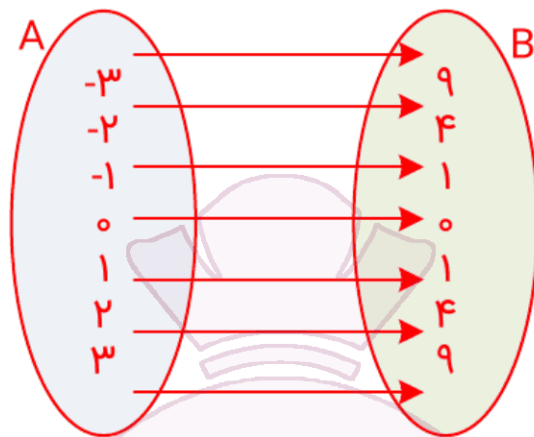
سؤال

۴

برای رابطه $y = x^2$ که $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ مشابه مثال قبل، جدول، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

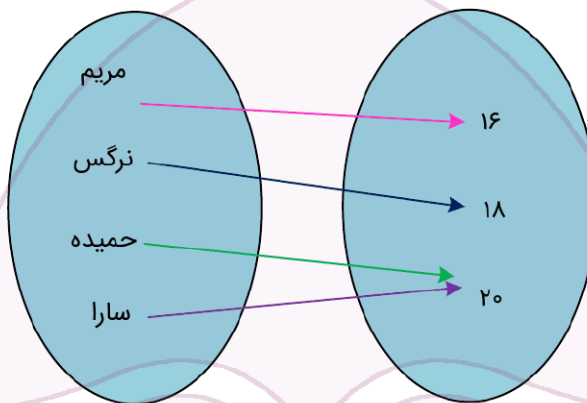
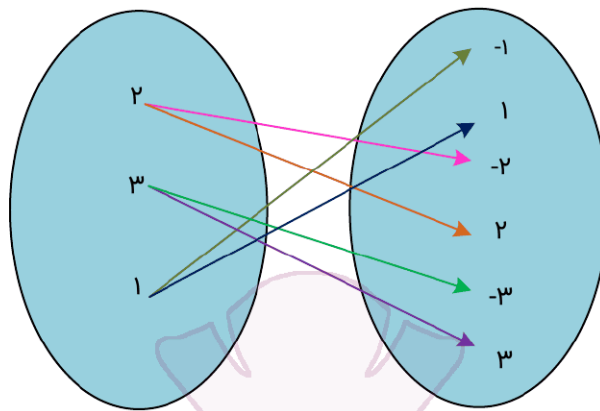
$$y = x^2$$

۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳	x
۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹	y
$(۳, ۹)$ G	$(۲, ۴)$ F	$(۱, ۱)$ E	$(۰, ۰)$ D	$(-۱, ۱)$ C	$(-۲, ۴)$ B	$(-۳, ۹)$ A	(x, y)



توشه ای برای موفقیت

۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع می‌باشند؟ چرا؟



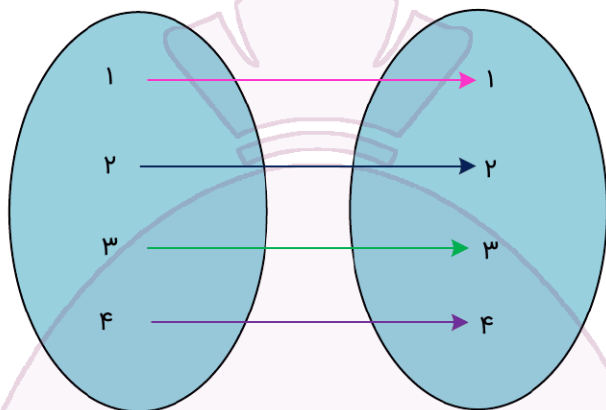
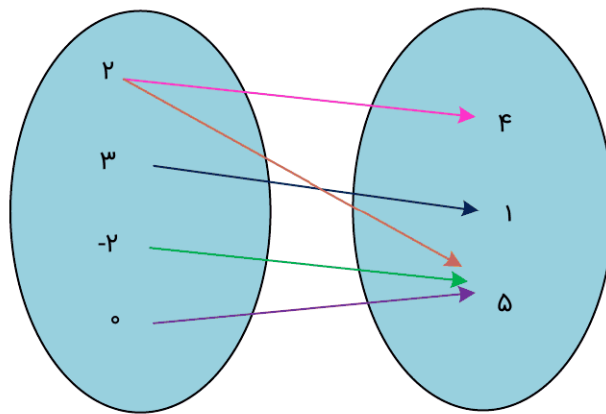
دانش آموزان

نمرات درس فیزیک

تابع نیست زیرا از اعضای مجموعه اول بیش از یک پیکان خارج شده است.

تابع است زیرا از تمام اعضای مجموعه اول فقط یک پیکان خارج شده است.

توشه ای برای موفقیت



تابع نیست زیرا از عدد ۲ دو پیکان خارج شده است.

تابع است زیرا به ازای هر عدد از دامنه تنها یک عدد از برد وجود دارد.

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها می‌تواند نمایش یک تابع باشد؟

الف) $F = (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3)$ تابع است، زوج‌هایی با مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت نداریم.

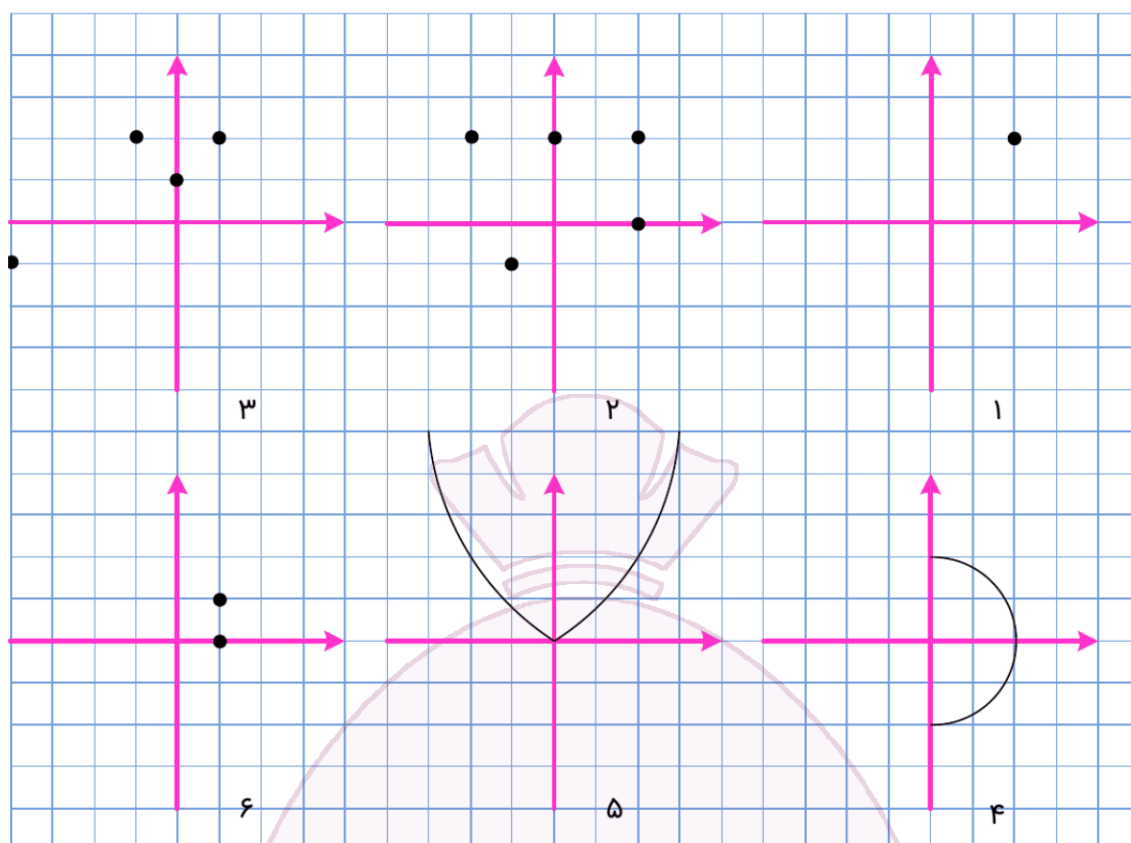
ب) $G = (4, 1), (2, -1), (1, -1), (4, 2)$ تابع نیست، در زوج مرتب اول و آخر با مؤلفه‌های اول یکسان (۴) مؤلفه‌های دوم متفاوت داریم.

پ) $H = (2, 3)$ تابع است، مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت نداریم.

ت) $I = (3, 3)$ تابع است. مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت نداریم.

ث) $J = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 4)$ تابع نیست، در زوج‌های مرتب (۲ و ۴) و (۲ و ۲) مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت داریم.

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع می‌باشند؟ چرا؟



۱) تابع است.

۲) تابع نیست زیرا وجود دو نقطه $(2,2)$ و $(2,-2)$ دارای مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت می‌باشد.

۳) تابع است زیرا هر خط به موازات محور y ها نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

۴) تابع نیست زیرا وجود دارد حداقل یک خط به موازات محور y ها که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.

۵) تابع است زیرا هر خط به موازات محور y ها نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

۶) تابع نیست زیرا دو نقطه موجود دارای مؤلفه اول برابر و مؤلفه دوم نابرابر می‌باشند.

۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغاتی آن شهر را نسبت می‌دهد. ☐ تابع است ☒ تابع نیست

تابع نیست چون شهر می‌تواند بیش از یک سوغاتی داشته باشد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد. ☒ تابع است ☐ تابع نیست

تابع است زیرا هر کس تنها یک روز تولد دارد.

پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد. ☐ تابع است ☒ تابع نیست

تابع نیست

تابع نیست زیرا یک شهر ممکن است بیش از یک نماینده در مجلس شورای اسلامی داشته باشد.

ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد. ☒ تابع است ☐ تابع نیست

تابع است زیرا همه‌ی مسلمانان تنها یک قبله دارند. (تابع ثابت)

صفحه ۶۱

کار در کلاس

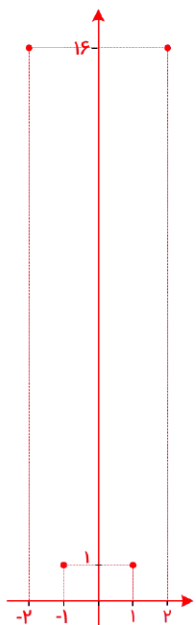
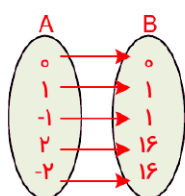
۶

در جدول زیر در هر سطری یکی از نمایش‌های رابطه‌ای مشخص شده است، ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کرده و سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

جدولی	توصیفی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی	نمایش پیکانی										
<table><tr><th>y</th><th>x</th></tr><tr><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td></tr><tr><td>۵</td><td>۴</td></tr><tr><td>۶</td><td>۵</td></tr></table>	y	x	۳	۲	۴	۳	۵	۴	۶	۵	f رابطه‌ای است که به هر عضو مجموعه‌ی $A = \{۲, ۳, ۴, ۵\}$ واحد بالاتر از آن عضو تعلق می‌گیرد.	$f = \{(۲, ۳), (۳, ۴), (۴, ۵), (۵, ۶)\}$		
y	x													
۳	۲													
۴	۳													
۵	۴													
۶	۵													
<table><tr><th>y</th><th>x</th></tr><tr><td>۱</td><td>۱</td></tr><tr><td>۴</td><td>۲</td></tr><tr><td>۹</td><td>۳</td></tr><tr><td>۱۶</td><td>۴</td></tr></table>	y	x	۱	۱	۴	۲	۹	۳	۱۶	۴	f رابطه‌ای است که به هر عضو مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را نسبت می‌دهد.	$f = \{(۱, ۱), (۲, ۴), (۳, ۹), (۴, ۱۶)\}$		
y	x													
۱	۱													
۴	۲													
۹	۳													
۱۶	۴													

ایران توشه

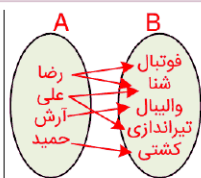
توشه‌ای برای موفقیت



$$f = \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 16), (-2, 16)\}$$

f رابطه‌ای است که به هر عضو مجموعه‌ی $A = 0, 1, -1, 2, -2$ چهارم آن را نسبت می‌دهد.

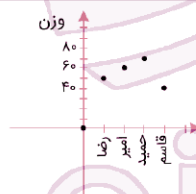
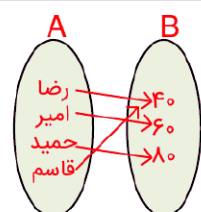
y	x
0	0
1	1
1	-1
16	2
16	-2



$f =$ و (علی, رضا, فوتبال) و (شنا) و (رضا, شنا) و (علی, آرش, والیبال), تیراندازی) و (حمید, کشتی)

f رابطه‌ای است که بیانگر آن است که رضا رشته ورزشی فوتبال و شنا و علی رشته ورزشی شنا و تیراندازی و آرش رشته والیبال و حمید رشته ورزشی کشتی را انتخاب کرده‌اند.

y	x
فوتبال	رضا
شنا	علی
والیبال	آرش
تیراندازی	علی
کشتی	حمید



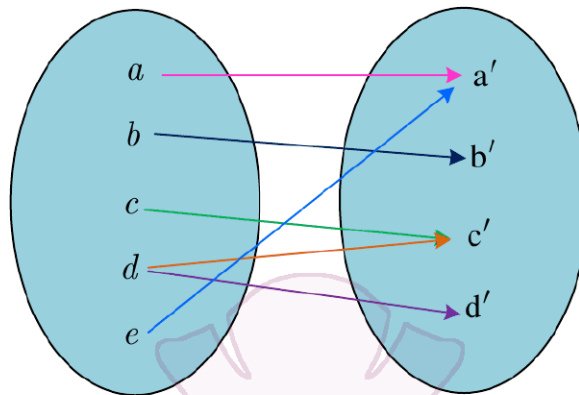
$f =$ و (امیر, رضا, 40) و (حمید, 80) و (60, قاسم, 40)

f رابطه‌ای است که بیانگر این است که رضا 40 کیلوگرم و امیر 60 کیلوگرم و حمید 80 کیلوگرم و قاسم 40 کیلوگرم وزن دارند.

y	x
40	رضا
60	امیر
80	حمید
40	قاسم

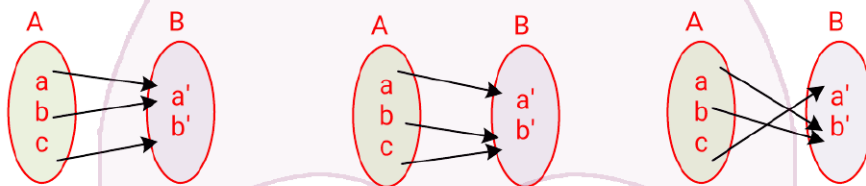
توشه‌ای برای موفقیت

۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟



با حذف عضو d نمودار تابع می‌شود البته اگر یکی از پیکان‌های خارج شده از d را نیز حذف می‌کردیم باز هم تابع بود.

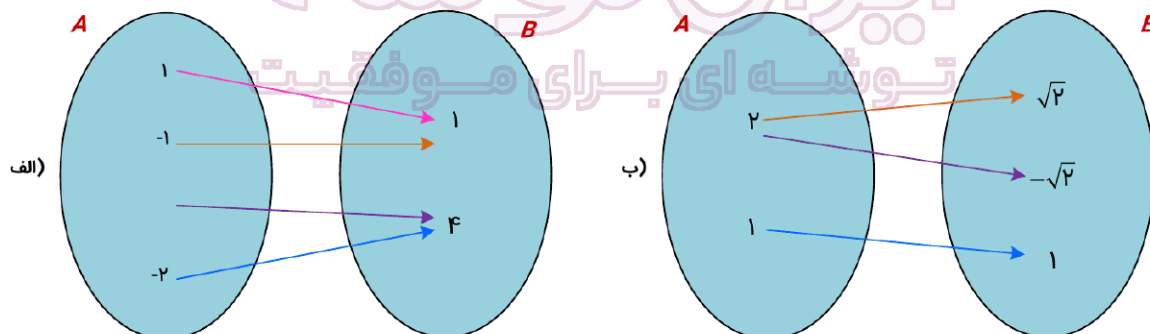
۲. اگر A مجموعه‌ی ۳ عضوی و B مجموعه‌ی ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.



۳. در رابطه‌ی زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد؟

$$f = (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 4)$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



(الف) تابع است زیرا از هر یک از مؤلفه‌های مجموعه‌ی A فقط و فقط یک پیکان خارج شده است و اگر بخواهیم نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهیم هیچ دو زوج مرتبی را نمی‌توانیم بیابیم که مؤلفه اول یکسان داشته باشد.

ب) تابع نیست زیرا عضو ۲ از مجموعه A به $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ وصل شده است یعنی از یک عضو از مجموعه A به بیش از یک عضو از مجموعه B پیکان وارد شده است و این دلیلی بر تابع نبودن رابطه است. $(2, \sqrt{2})$ و $(2, -\sqrt{2})$ که این زوج مرتبها مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم غیر یکسان دارند.

$$f = (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1) \text{ (پ)}$$

پ) تابع نیست $(2, 1), (2, 2)$ مؤلفه اول یکسان دارند و مؤلفه دومشان غیر یکسان است. همین طور $(3, 2), (3, 4)$.

ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می‌دهد.

ت) تابع است زیرا هر نفر فقط و فقط یک شماره ملی دارد و شماره ملی یک امر منحصر به فرد می‌باشد.

۵. اگر رابطه‌ی f تابع باشد، در این صورت حاصل $x^2 + y^2$ را به دست آورید (مجموعه f را پس از محاسبه x و y بنویسید).

$$f = (2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)$$

$$(5, 2), (5, x-y) \Rightarrow x-y=2$$

$$(2, 4), (2, x+y) \Rightarrow x+y=4$$

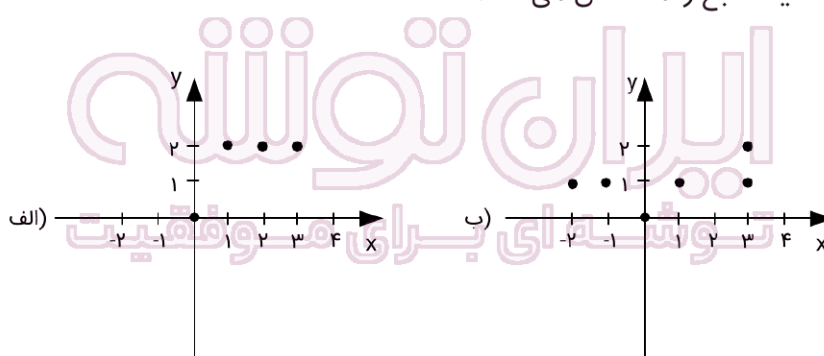
$$\Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3, y=1, x^2=9, y^2=1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9 + 1 = 10$$

$$f\{(2, 4), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, 2)\}$$

$$f = \{(2, 4), (5, 2), (3, 4)\}$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می‌کند؟



الف) تابع است نقاط روی نمودار عبارتند از $f = \{(0, 0), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$ که هیچ دو زوج مرتبی مؤلفه اول یکسان ندارند و یا می‌توان گفت هر خط به موازات محور y ها نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند که دلیل بر تابع بودن این نمودار می‌باشد.

ب) تابع نمی‌باشد ملاحظه می‌شود که نقاط $(۳, ۲)$ و $(۳, ۱)$ روی نمودار وجود دارند که این دو نقطه دارای طول یکسان می‌باشند و عرض متفاوت می‌باشد به عبارت دیگر در این ۲ زوج مرتب مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم غیر یکسان می‌باشد که باعث می‌شود نمودار تابع نباشد.

درس دوم: ضابطه جبری تابع

صفحه ۶۵

فعالیت

۸

با توجه به ضابطه هر تابع و مانند نمونه، مجموعه مقادیر یا برد هر تابع را مشخص کنید.

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x^2 + 1, \quad A = \{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\}$$

$f(x) = 2x^2 + 1$	x
$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 1 = 3$	-1
$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = 5$	$\sqrt{2}$
$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 9$	۲
$f(1) = 2 \times (1)^2 + 1 = 3$	۱
$f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 1$	۰
$f(\frac{1}{2}) = 2 \times (\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

(الف)

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = x^3 - 1, \quad A = \{1, -1, 0, 4, \sqrt[3]{3}, \frac{1}{3}, 2\}$$

$f(x) = x^3 - 1$	x
$1^3 - 1 = 0$	1
$(-1)^3 - 1 = -2$	-1
$0^3 - 1 = -1$	0
$4^3 - 1 = 63$	4
$(\sqrt[3]{3})^3 - 1 = 2$	$\sqrt[3]{3}$
$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^3 - 1 = \frac{-26}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
$2^3 - 1 = 7$	2

$$\rightarrow R_f = \{0, -2, -1, 63, 2, \frac{-26}{\sqrt[3]{2}}, 7\}$$

(ب)

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 1, \quad A = \{0, -1, 8, 3, 2\}$$

$f(x) = \sqrt{x+1} - 1$	x
$\sqrt{0+1} - 1 = 0$	0
$\sqrt{-1+1} - 1 = -1$	-1
$\sqrt{8+1} - 1 = 2$	8
$\sqrt{3+1} - 1 = 1$	3
$\sqrt{2+1} - 1 = \sqrt{3} - 1$	2

$$\rightarrow R_f = \{0, -1, 2, 1, \sqrt{3} - 1\}$$

(پ)

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad A = \{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$	x
$\frac{-2+1}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$	-2
$\frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$	0
$\frac{1+1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$	1
$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$	$\frac{1}{2}$

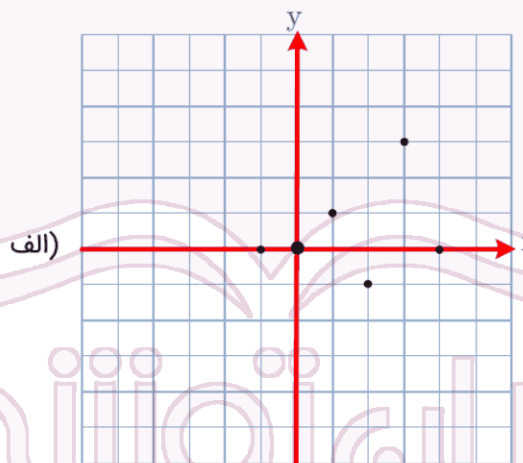
$$\rightarrow R_f = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -2, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}, -3 \right\}$$

صفحه ۶۶

کار در کلاس

۹

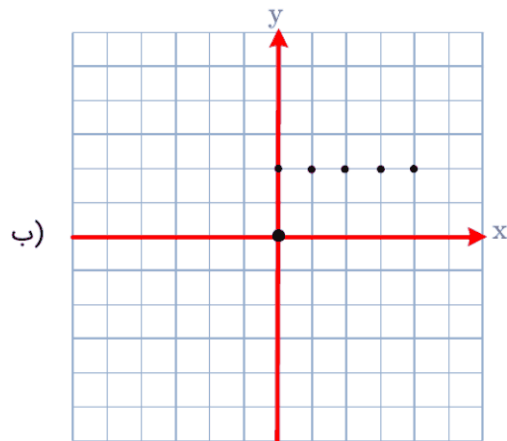
۱. برای هر یک از توابع زیر دامنه و بُرد را مشخص کرده و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.



$$f = \{(-1, 0), (1, 1), (2, -1), (3, 3), (4, 0)\}$$

$$D_f = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$$

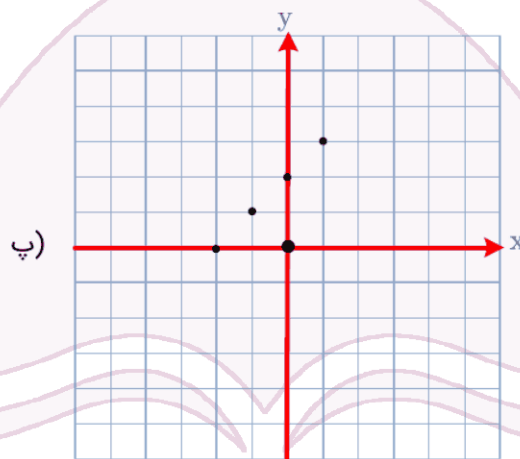
$$R_f = \{0, 1, -1, 3\}$$



$$g = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$$

$$D_g = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad R_g = \{2\}$$

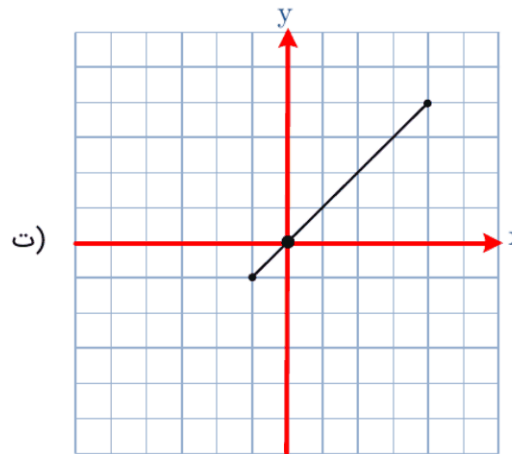
$$\{y = 2 \mid x \in W, x \leq 4\}$$



$$h = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3)\}$$

$$D_h = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$R_h = \{0, 1, 2, 3\} \quad \{y = x + 2 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 1\}$$



$$D_L = [-1, 4] \quad R_L = [-1, 4]$$

$$\{y = x \mid -1 \leq x \leq 4\}$$

۲. دامنه و برد هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

$$f: A \rightarrow B \quad B = ۲, ۳, ۴, ۵, \dots$$

$$f(x) = x + ۴ \quad A = ۲, \dots, \dots, \dots, \dots$$

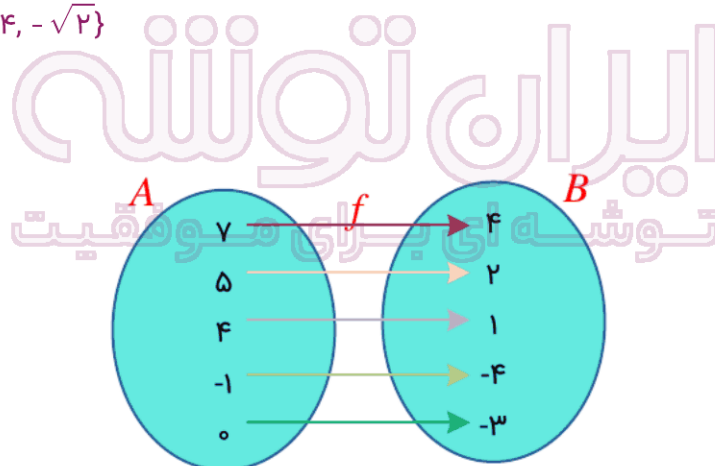
$$f(x) = x + ۴ \quad f(۲) = ۲ + ۴ = ۶ \Rightarrow R(f) = R = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

$$D(f) = A = \{۲, -۲, -۱, ۰, ۱\}$$

$$f = (1, -1), (۲, -۲), (۳, -۳), (۴, -۴), (\sqrt{۲}, -\sqrt{۲})$$

$$\Rightarrow D_f = \{1, ۲, ۳, ۴, \sqrt{۲}\}$$

$$R_f = \{-1, -۲, -۳, -۴, -\sqrt{۲}\}$$

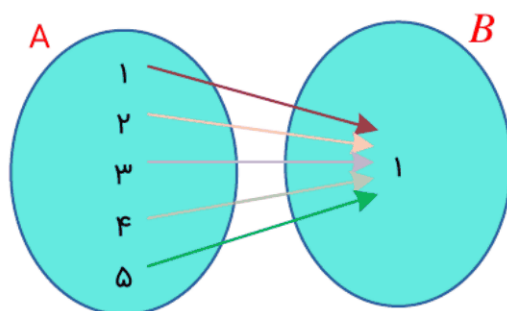


$$D_f = \{۷, ۵, ۴, -1, ۰\}$$

$$R_f = \{۴, ۲, ۱, -۴, -۳\}$$

پ)

(ت)



$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R_f = \{1\}$$

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (\frac{1}{p}, \frac{1}{p}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (o, o)\} \text{ (ث)}$$

$$D_f = \{1, 2, 3, \frac{1}{p}, \sqrt{2}, o\}$$

$$R_f = \{1, 2, 3, \frac{1}{p}, \sqrt{2}, o\}$$

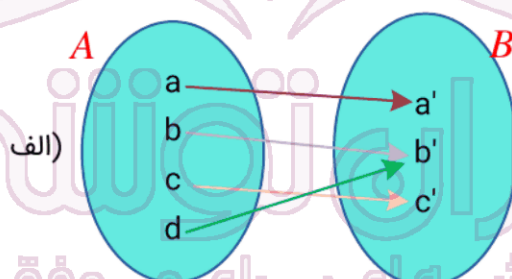
صفحه ۶۷

تمرین

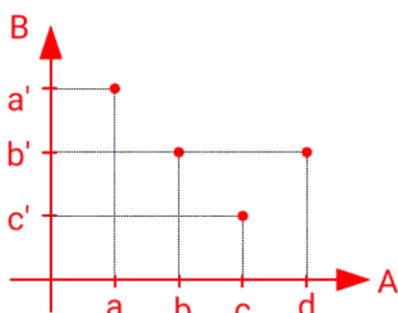
۱۰

۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.

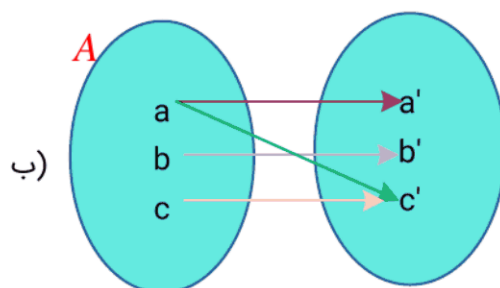
(الف)



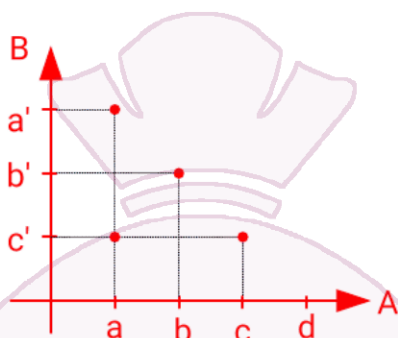
تابع است زیرا از هر یک از اعضای دامنه تنها یک پیکان خارج شده است.



(ب)

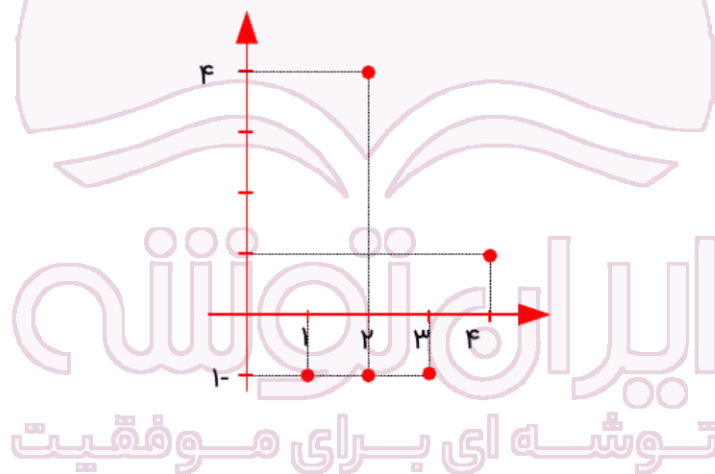


تابع نمی‌باشد زیرا از مؤلفه a دو پیکان خارج شده است.



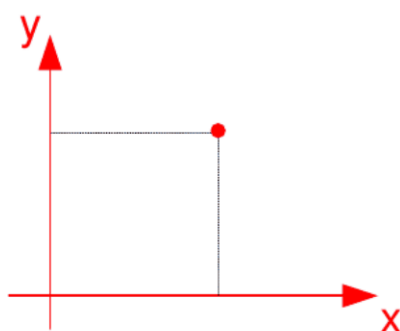
(پ) $f = (2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)$

تابع نیست زیرا دو زوج مرتب $(2, -1)$ و $(2, 4)$ دارای مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت هستند.



(ت) $g = (1, 1)$

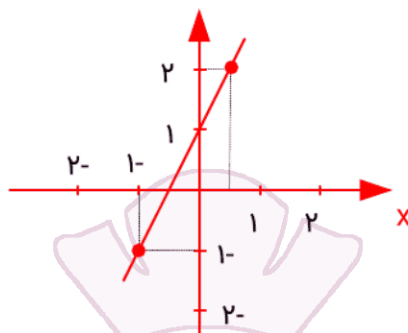
تابع است زیرا هر خط به موازات محور y ها نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.



ث) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 1$

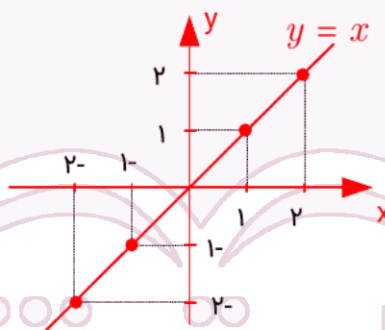
تابع است زیرا به اعضای هر عضو از دامنه فقط و فقط یک عضو از برد وجود دارد و اگر بخواهیم $y = 2x + 1$ را رسم کنیم هر خط به موازات محور y ها نمودار را فقط و فقط در یک نقطه قطع می‌کند.



ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x$

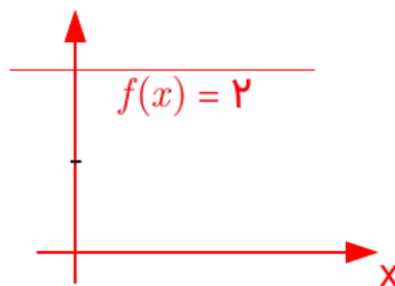
تابع است زیرا هر عضو از دامنه رابطه به خودش نظیر می‌شود. (تابع همانی)



ح) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2$

تابع است، زیرا در شکل خطی موازی محورهای y ها وجود ندارد که نمودار را در دو نقطه قطع کند.



۲. بُرد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف) $f: A \rightarrow B$

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$$

$$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$$

$$f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 3$$

$$\Rightarrow R_f = \{1, 3, 7\}$$

ب) $f: A \rightarrow B$

$$f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad A = \left\{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\right\}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

$$f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$f(-1) = \frac{(-1)+1}{(-1)} = 0$$

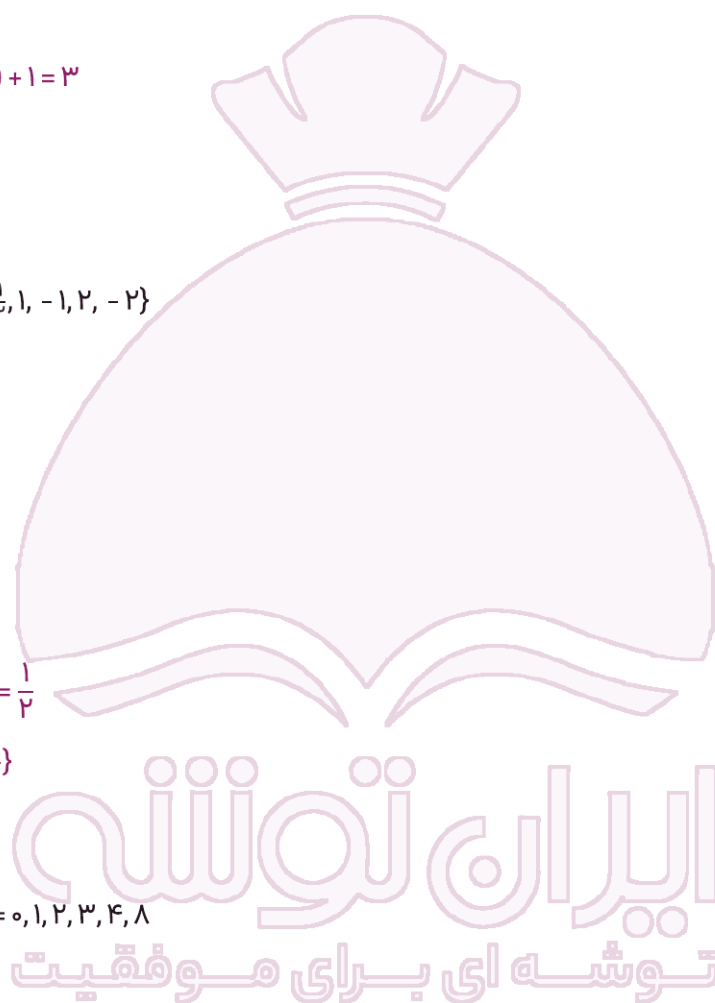
$$f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R_f = \left\{3, 2, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

پ) $f: A \rightarrow B$

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$$



$$f(0) = \sqrt{0+1} = 1$$

$$f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$f(3) = \sqrt{3+1} = 2$$

$$f(4) = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$f(8) = \sqrt{8+1} = 3$$

$$\Rightarrow R_f = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, 3$$

$$\text{ت) } f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = x, \quad A = W = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 2$$

$$f(3) = 3$$

⋮

$$\Rightarrow R_f = 0, 1, 2, 3, \dots = W$$

$$\text{ث) } f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = 0, \quad A = \mathbb{R}$$

هر عدد حقیقی به جای x قرار دهیم حاصل صفر می شود، یعنی:

$$f(1) = 0, f(-1) = 0, \dots \Rightarrow D_f = \mathbb{R}, R_f = \{0\}$$

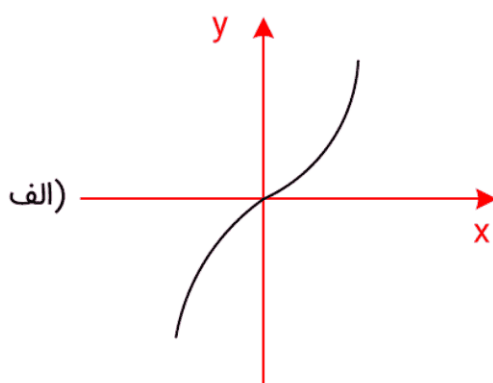
۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟ حاصل $f(3)$ را بیابید.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ب) $f(x) = 2\sqrt{x-4}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (الف) $f(x) = 2(x-4)^3$
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ت) $f(x) = 2\sqrt{x-4}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (پ) $f(x) = 2x^3 - 4$

پاسخ گزینه ی پ می باشد: $f(3) = 2(3^3) - 4 = 50$

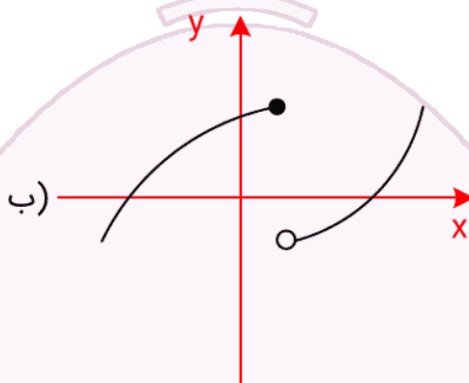
۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می باشد؟ چرا؟

(الف)



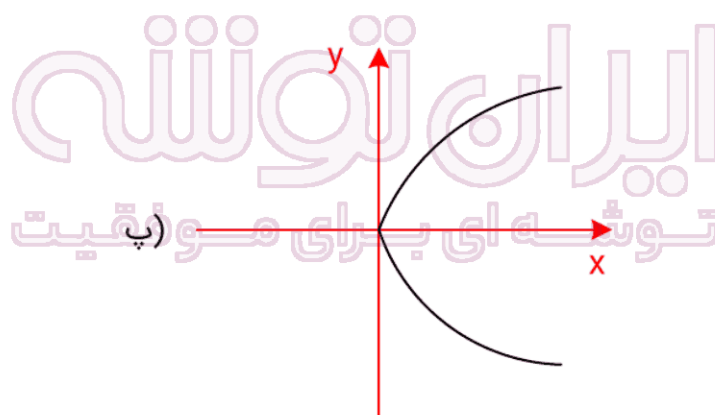
تابع است زیرا هر خط به موازات محور y ها که رسم کنیم نمودار را فقط و فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

(ب)



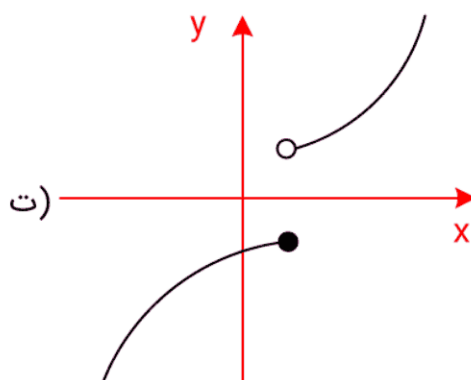
تابع است زیرا هر خط به موازات محور y ها که رسم کنیم نمودار را فقط و فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

(پ)



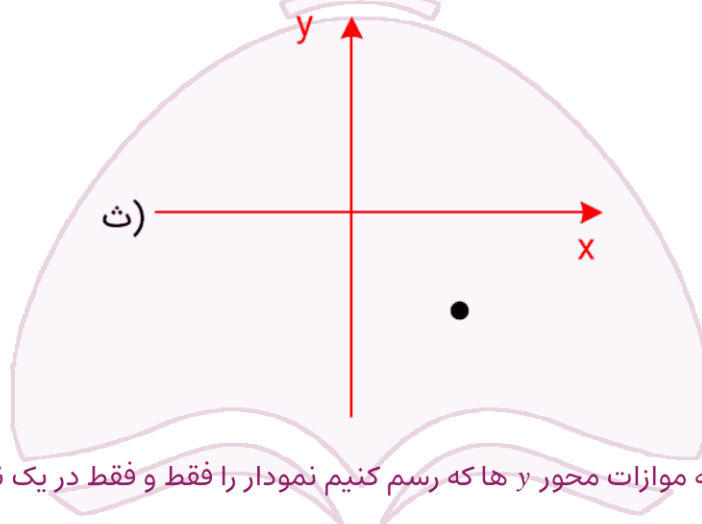
تابع نیست زیرا به عنوان مثال اگر خط $x=1$ را رسم کنیم نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

(ت)



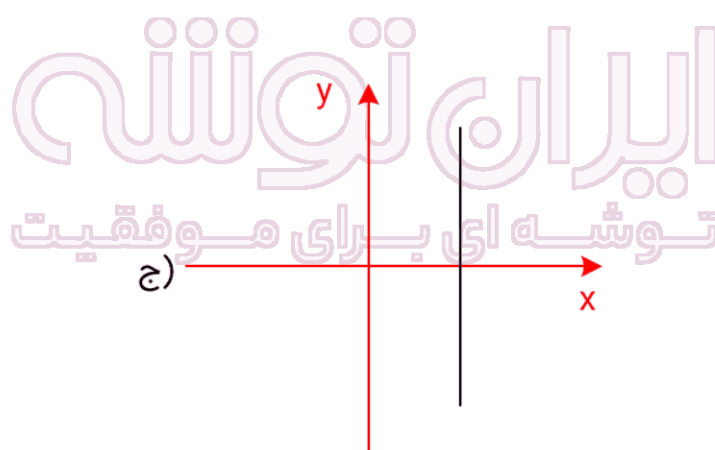
تابع است زیرا هر خط به موازات محور y ها که رسم کنیم نمودار را فقط و فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

(ث)

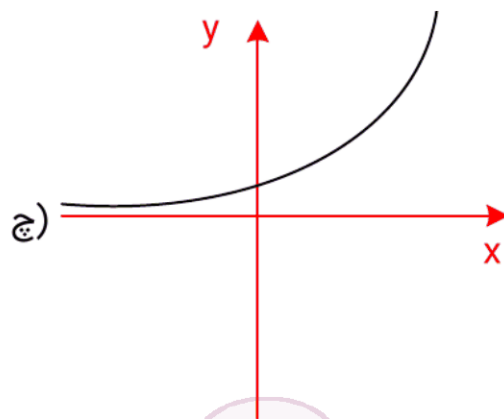


تابع است زیرا هر خط به موازات محور y ها که رسم کنیم نمودار را فقط و فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

(ج)



تابع نیست زیرا اگر خط $x=2$ را به موازات محور y ها رسم کنیم نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



تابع است زیرا هر خط به موازات محور y ها که رسم کنیم نمودار را فقط و فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

درس سوم: نمودار تابع خطی

صفحه ۷۰

فعالیت

۱۱

الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه ای آویزان نشده است ۵ سانتی متر می باشد و به ازای هر کیلو گرم وزنه ای که به آن آویزان شود نیم سانتی متر به طول آن افزوده می شود. طول فنر را در شکل های زیر مشخص کنید.



$y = 5 + 0/5m$ $y = 5 + 0/5$ $y = 5/5cm$	$y = 5 + 0/5 \times 2$ $y = 6cm$	$y = 5 + 0/5 \times 4$ $y = 5 + 2$ $y = 7cm$	$y = 5 + 0/5 \times 7$ $y = 5 + 3/5$ $y = 8/5cm$
--	-------------------------------------	--	--

ب) جدول زیر را تکمیل نمایید.

اندازه وزنه (بر حسب کیلوگرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتی متر)	۵/۵	۶	۷/۵	۸/۵	۱۵	$۵ + ۰/۵a$

پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم مقادیر $f(۱), f(۴), f(۸), f(۱۰)$ (بر حسب سانتی متر) را محاسبه نمایید.

$$f(m) = ۵ + ۰/۵m \rightarrow$$

$$f(۱) = ۵ + ۰/۵ \times ۱ = ۵/۵$$

$$f(۴) = ۷$$

$$f(۸) = ۹$$

$$f(۱۰) = ۱۰$$

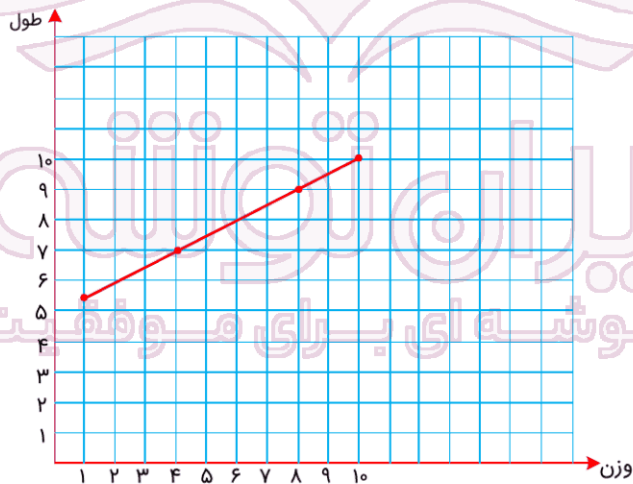
ت) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

$$f(۱) = ۵/۵ \Rightarrow (۱, ۵/۵)$$

$$f(۴) = ۷ \Rightarrow (۴, ۷)$$

$$f(۸) = ۹ \Rightarrow (۸, ۹)$$

$$f(۱۰) = ۱۰ \Rightarrow (۱۰, ۱۰)$$



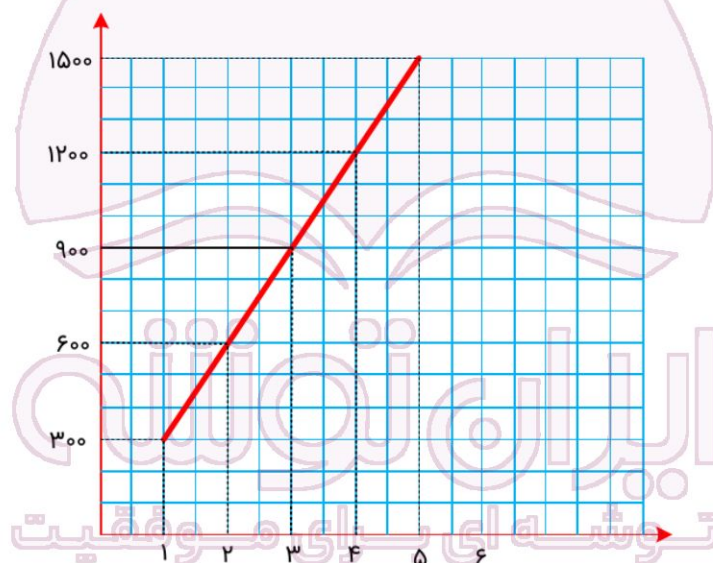
یک کارخانه تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی در هر ساعت $\frac{1}{3}$ کیلومتر لوله تولید می‌کند.



اگر متراژی که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم جدول روبه رو را برای $f(x)$ به ازاء مقادیر مختلف x کامل نمایید:

بر حسب ساعت x	۱	۲	۳	۴	۵
بر حسب متر $f(x)$	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰

نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

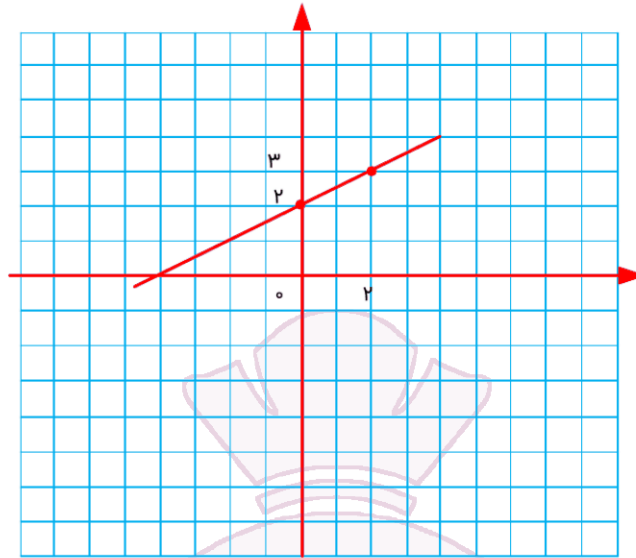


در یک تابع خطی $f(0)=2, f(2)=3$ با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده اید ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص نموده و نمودار تابع را رسم کنید.

$$m = \frac{11-2}{2-0} = \frac{1}{2}$$

معادله خط: $y - 0 = \frac{1}{4}(x - 2)$

بنابراین $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$



این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



صفحه ۷۳

کار در کلاس

۱۴

جدول زیر رابطه بین عمق و دمای سنگ های را در زیر زمین نشان می دهد. x معرف عمق (بر حسب کیلومتر) و y معرف دما (بر حسب سانتی گراد) می باشد.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

اگر دمای سنگ ها تابع خطی بر حسب ارتفاع باشد ابتدا جدول زیر را کامل نمایید و به کمک آن تابع $y = f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به ۴۴۰ درجه سانتی گراد می رسد؟

$f(2)$	$f(1)$	معادله تابع: $y = f(x)$	معادله خط: $y = mx - n$	شیب خط: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$f(2) = 75$	$f(1) = 20$	$y = 55x - 35$		شیب خط $m = \frac{185 - 75}{4 - 2} = 55$

معادله خط: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - ۷۵ = ۵۵(x - ۲)$$

$$y = ۵۵x - ۲۵$$

$$۴۴۰ = ۵۵x - ۳۵ \Rightarrow ۵۵x = ۴۴۰ + ۳۵ \Rightarrow ۵۵x = ۴۷۵ \Rightarrow x = \frac{۴۷۵}{۵۵} = \frac{۹۵}{۱۱} = ۸/۶۳km$$

صفحه ۷۴

کار در کلاس

۱۵

در برنامه ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش بینی جمعیت در برنامه ریزی است. برای برآورد جمعیت مدل های مختلفی وجود دارد که هرکدام ویژگی های خاص خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجه اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه ریزی بستگی دارد. یکی از این روش ها مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می کند. (رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیر زمان می باشد) فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پنجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در ۱۴۰۵ به طور تقریبی برآورد کنید.

x	۱۳۸۵	۱۳۹۵	۱۴۰۵
y	۱/۰۵۰/۰۰۰	۱/۲۸۰/۰۰۰	x

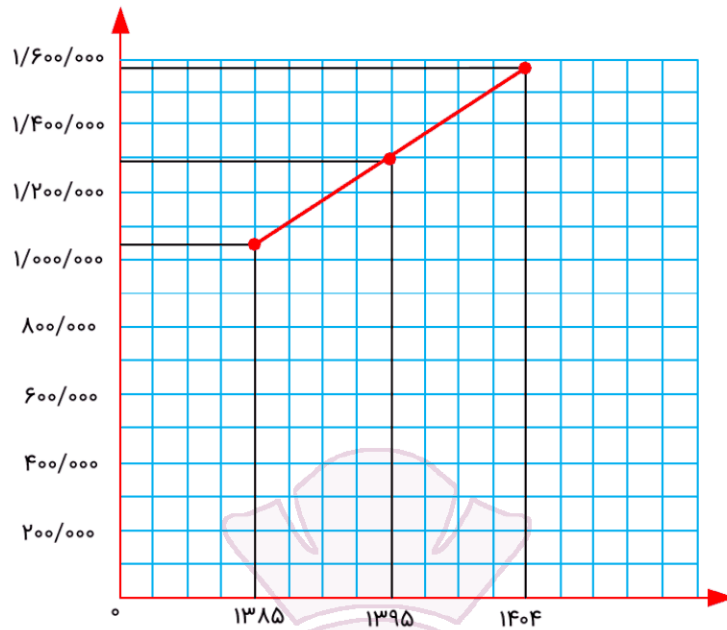
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{۱۲۸۰۰۰۰ - ۱۰۵۰۰۰۰}{۱۳۹۵ - ۱۳۸۵}$$

$$= \frac{۲۳۰۰۰۰}{۱۰} = ۲۳۰۰۰$$

$$۲۳۰۰۰ = \frac{x - ۱/۲۸۰/۰۰۰}{۱۰} \Rightarrow ۲۳۰۰۰۰ =$$

$$x - ۱/۲۸۰/۰۰۰ \Rightarrow x = ۱/۵۱۰/۰۰۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



صفحه ۷۵

کار در کلاس

۱۶

ضابطه تابع محیط مستطیل هایی که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است را بر حسب عرض آن نوشته و نشان دهید یک تابع خطی است. آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟

x طول و y عرض و $x = y + 4$

محیط مستطیل $= (x + y) \times 2$ ، محیط مستطیل $= 2 \times (\text{عرض} + \text{طول})$

ملاحظه می شود که محیط مستطیل یک تابع خطی است.

محیط مستطیل $= (y + 4 + y) \times 2 = (2y + 4) \times 2 = 4y + 8$

مساحت مستطیل $= x \times x$ ، مساحت مستطیل $= \text{طول} \times \text{عرض}$

مساحت مستطیل $= (y + 4) \times y = y^2 + 4y$

ملاحظه می شود که مساحت یک تابع خطی نمی باشد.

صفحه ۷۵

کار در کلاس

۱۷

اگر نمودار تابع خطی f از مبدا عبور کرده و $f(-1) = 2$ نمودار و ضابطه تابع f را مشخص کنید.

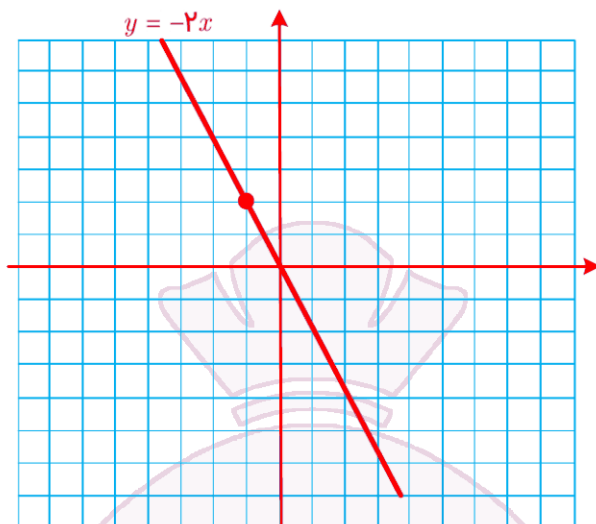
چون نمودار تابع خطی f از مبدا عبور می کند پس نقطه $(0, 0)$ روی نمودار قرار دارد و چون $f(-1) = 2$ بنابراین نقطه $(-1, 2)$ نیز جز نمودار می باشد.

بنابراین خواهیم داشت:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{2 - 0}{-1 - 0} = -2$$

$$y - 0 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x$$

ضابطه تابع f برابر می شود با: $y = -2x$



صفحه ۷۵

تمرین

۱۸

۱. مقادیر m, n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطه $f(x) = mx + n$ داشته باشیم $f(2) = 4, f(1) = 1$

$$y = mx + n$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow 1 = m(1) + n \Rightarrow 1 = m + n$$

$$f(2) = 4 \Rightarrow 4 = m(2) + n \Rightarrow 4 = 2m + n$$

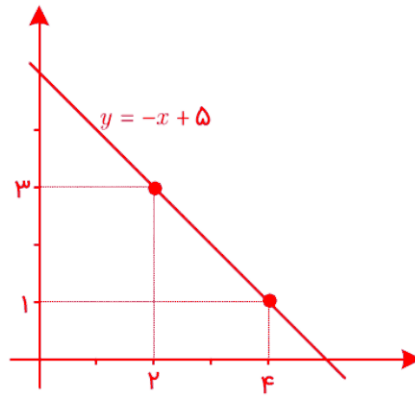
$$m + n = 1, 2m + n = 4 \Rightarrow -m - n = -1, 2m + n = 4$$

$$\Rightarrow m = 3, 3 + n = 1 \Rightarrow n = -2 \Rightarrow f(x) = 3x - 2$$

۲. ضابطه تابع خطی f که از نقاط $(2, 3), (4, 1)$ می گذرد را مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{3 - 1}{2 - 4} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = (-1)(x - 2) \Rightarrow y = -x + 5$$



۳. در تابع خطی f داریم $f(1) = 5, f(2) = 8$ مقادیر $f(-3), f(5)$ را بیابید.

$$f(1) = 5 \Rightarrow (1, 5)$$

$$f(2) = 8 \Rightarrow (2, 8)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{8 - 5}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y - 5 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x + 2$$

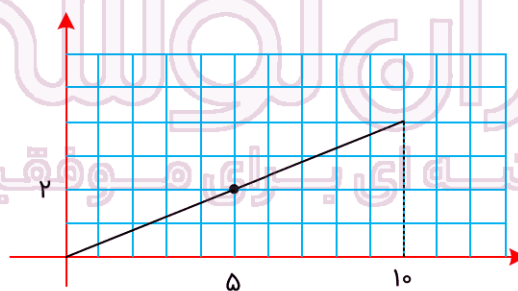
$$f(-3): 3(-3) + 2 = -7, \quad f(-3) = -7$$

$$f(5): 3(5) + 2 = 17, \quad f(5) = 17$$

ضابطه تابع خطی $y = 3x + 2$

۴. نمودار تابع خطی را رسم نمایید که دامنه آن برابر $A = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 10\}$ از نقطه $A(5, 2)$ بگذرد.

با داشتن یک نقطه بی‌نهایت خط گذشته از آن نقطه رسم می‌شود که چون دامنه تابع داده شده است، همه خطها باید در بازه $[0, 10]$ باشند. یکی از آنها به صورت زیر است:



۵. نمودار یک تابع خطی از مبدا می‌گذرد و $f(2) = 7$ در این صورت اختلاف $f(0/1), f(-0/1)$ را به دست آورید.

$$y = mx$$

$$m = \frac{y}{x} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{7}{2}x$$

$$f(0/1) = \frac{7}{2}(0/1) = \frac{7}{2}$$

$$f(-0/1) = \frac{7}{2}(-0/1) = -\frac{7}{2}$$

$$f(0/1) - f(-0/1) = \left(\frac{7}{2}\right) - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{14}{2} = 7$$

۶. رابطه بین دما بر حسب سانتی گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ می‌باشد. دمای یک جسم 20° درجه سانتی گراد بالا رفته است، دمای آن بر حسب فارنهایت چقدر افزایش داشته است؟

$$f = \frac{9}{5}C + 32$$

$$0^\circ \Rightarrow f = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$$

$$20^\circ \Rightarrow F = \frac{9}{5}(20) + 32 = 68$$

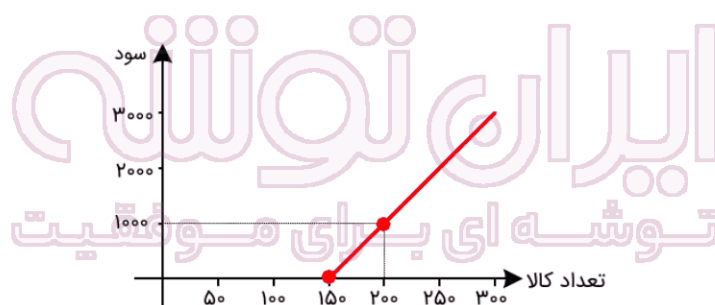
$$68 - 32 = 36$$

۳۶ درجه بر حسب فارنهایت افزایش یافته است.

۷. یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را ۷۰ تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

سود = درآمد - هزینه ، تابع سود $= 70x - (3000 + 50x)$



ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا باید بفروشد تا سود دهی آغاز شود؟

$$= 70x - 3000 - 50x$$

$$= 20x - 3000$$

$$20x - 3000 = 0 \Rightarrow 20x = 3000 \Rightarrow x = 150 \Rightarrow x > 150$$

از کالای ۱۵۰ (صد و پنجاه و یکم) سود دهی آغاز می‌شود.

درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲

صفحه ۷۷

فعالیت

۱۹

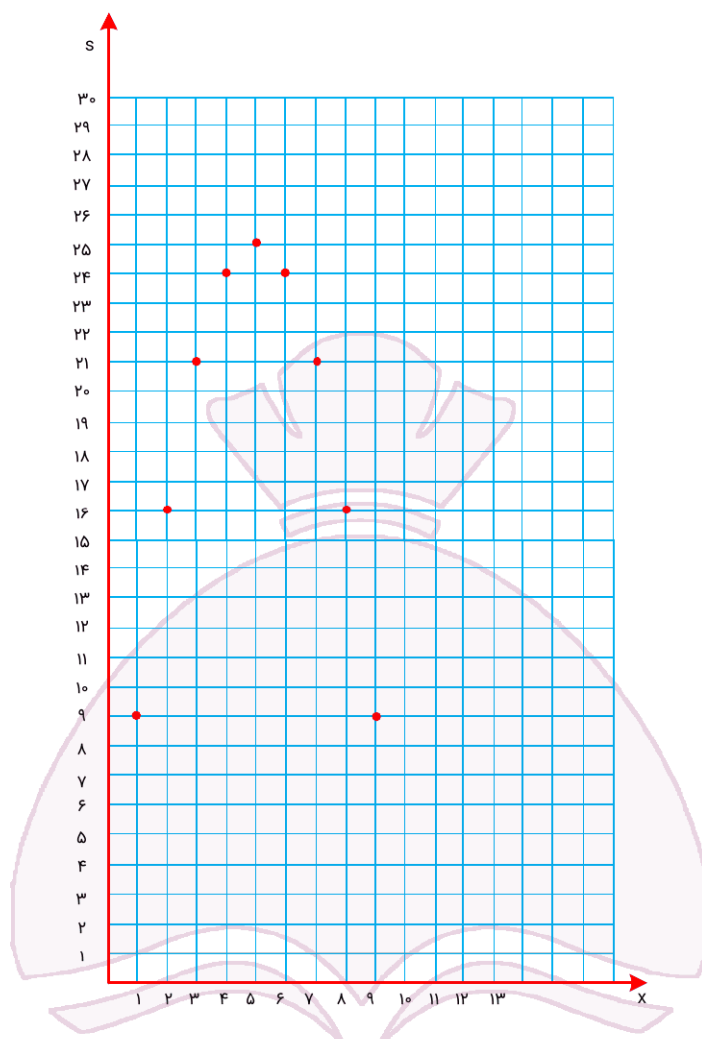
برای برگزاری یک جلسه با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع‌هایی 1×1 یک میز مستطیل شکل با محیط ثابت ۲۰ تهیه می‌کنیم. اندازه ضلعی که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می‌گیرد را با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می‌دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان دهیم.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
y	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
s	۹	۱۶	۲۱	۲۴	۲۵	۲۴	۲۱	۱۶	۹
(x, s)	(۱, ۹)	(۲, ۱۶)	(۳, ۲۱)	(۴, ۲۴)	(۵, ۲۵)	(۶, ۲۴)	(۷, ۲۱)	(۸, ۱۶)	(۹, ۹)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ب) اگر هر زوج مرتب (x, s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محورهای زیر مشخص کنید.



صفحه ۷۸

فعالیت

۲۰

یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه برای گروه کارگران خود تعیین می‌کند، مبلغ $x - ۱۲۰۰$ تومان می‌باشد. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب متر مربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذا گروه به طور ثابت روزانه ۳۰۰۰۰ تومان و همچنین متر مربعی ۲۰۰ تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر متر مربع رنگ آمیزی به ازای $x = ۲۰۰$ (۲۰۰ متر کار در یک روز) و $x = ۳۰۰$ چقدر است؟

$$\text{هزینه گروه برای } ۲۰۰ \text{ متر رنگ آمیزی} = ۲۰۰ \times ۱۰۰۰ + ۳۰۰۰۰ + ۲۰۰ \times ۲۰۰ = ۲۷۰۰۰۰$$

$$\text{هزینه گروه برای } ۳۰۰ \text{ متر رنگ آمیزی} = ۳۰۰ \times ۹۰۰ + ۳۰۰۰۰ + ۳۰۰ \times ۲۰۰ = ۲۷۰۰۰۰ + ۳۰۰۰۰ + ۶۰۰۰۰ = ۳۶۰۰۰۰$$

ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x = ۲۰۰$ و $x = ۳۰۰$ چقدر است؟

$$1200 - 300 = 900 \text{ تومان}$$

$$1200 - 200 = 1000 \text{ تومان}$$

پ) اگر تابع سود گروه را با p نشان دهیم $p(300), p(200), p(100), p(20)$ را محاسبه نمایید.

$$p(20) = 20 \times (1200 - 20) - (30000 + 20 \times 200) = -10400$$

$$p(100) = 100 \times (1200 - 100) - (30000 + 100 \times 200) = 11000 - 50000 = -39000$$

$$p(200) = 200 \times (1200 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = 200000 - 70000 = 130000$$

$$p(300) = 300 \times (1200 - 300) - (30000 + 300 \times 200) = 270000 - 90000 = 180000$$

ت) حاصل $p(x)$ را به دست آورده و آن را ساده نمایید.

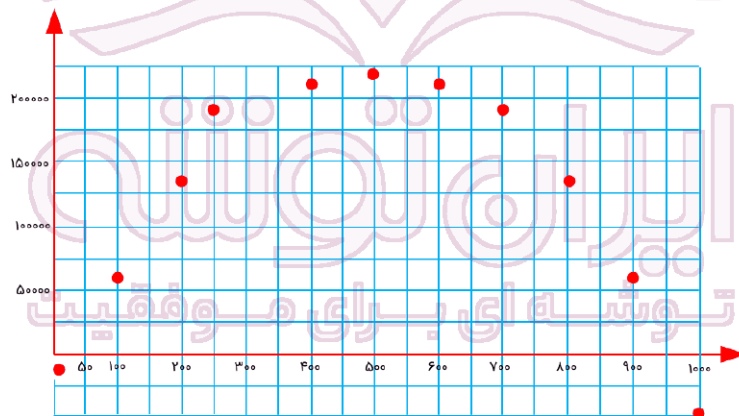
$$P(x) = \text{هزینه} - \text{درآمد} = x(1200 - x) - (30000 + 200x)$$

$$= 1200x - x^2 - 30000 - 200x = -x^2 + 1000x - 30000$$

ث) جدول زیر را برای $p(x)$ به ازاء مقادیر مختلف x کامل نمایید.

x	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$p(x)$	-10400	-39000	130000	180000	210000	220000	210000	180000	130000	60000

ج) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

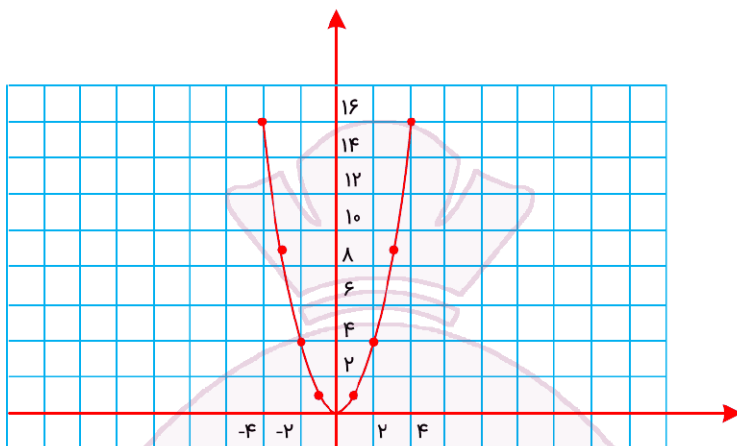


چ) توجیه نقاطی که پایین تر از محور افقی قرار می گیرند چیست؟ آیا هرچه متراژ بیشتری رنگ آمیزی شود، گروه سود بیشتری کسب می کند؟

خیر. زیرا با توجه به اینکه قیمت رنگ آمیزی هر متر مربع را از فرمول $1200 - x$ (x میزان رنگ آمیزی) به دست می آید. مشاهده می شود که هر چه میزان رنگ آمیزی (x) روزانه بیشتر می شود مبلغ رنگ آمیزی کمتر می شود و برابر متراژهای بالای ۱۲۰۰ متر در واقع منفی می شود که منطقی نمی باشد.

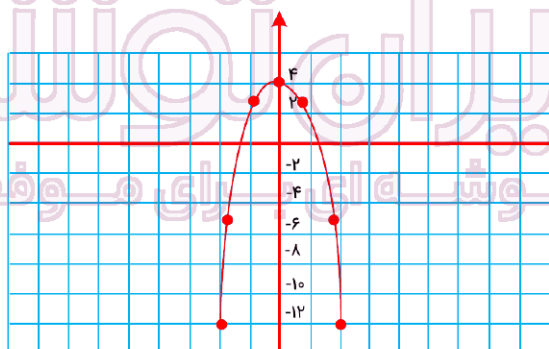
ابتدا جدول زیر را کامل کرده و سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

x	...	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	...
y	...	۱۶	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹	۱۶	...



جدول زیر را کامل کرده و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

x	...	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	...
y	...	-۱۲	-۵	۰	۳	۴	۳	۰	-۵	-۱۲	...



نقاط رأس سهمی‌هایی که معادلات آنها داده شده است را مشخص کنید.

الف) $y = x^2$

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0 \Rightarrow S(0, 0)$$

ب) $y = 4 - x^2$

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{0}{(-2)} = 0 \Rightarrow S(0, 4)$$

پ) $y = 2x^2 - 4x + 1$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow S(1, -1)$$

ت) $y = 2(x-1)^2 + 1$

$S(1, -1)$

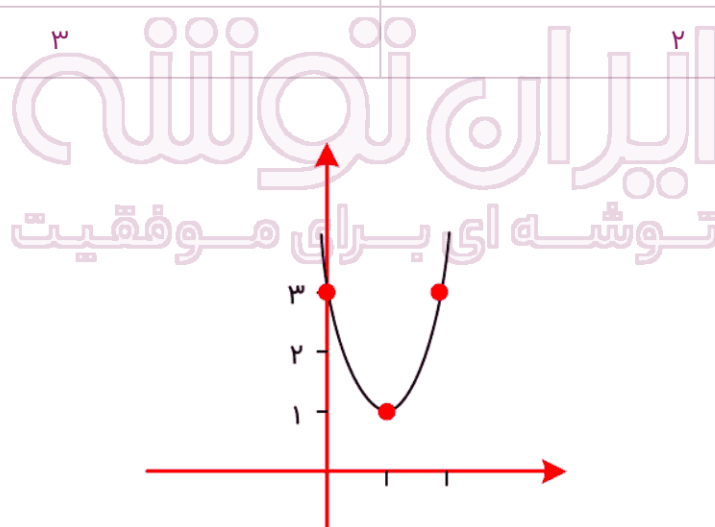
صفحه ۸۲

کار در کلاس

۲۴

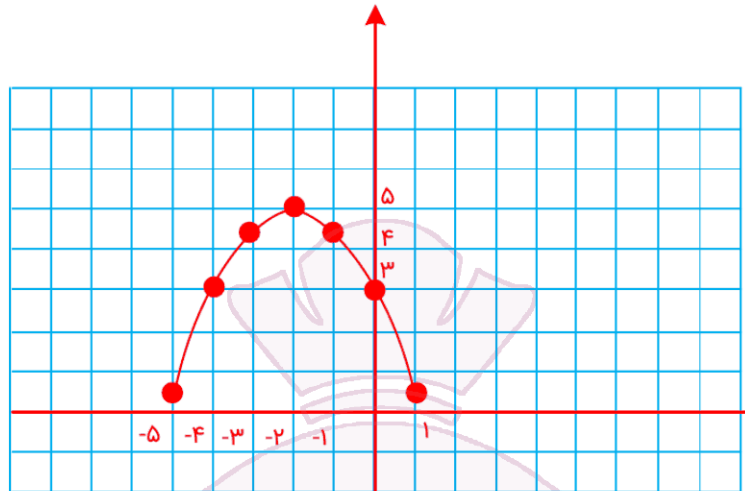
الف) راس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کرده و به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.
برای یافتن محور تقارن کافی است که قسمت مربع کامل را برابر صفر قرار دهیم.
 $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$ و با قرار دادن $x = 1$ در معادله سهمی ملاحظه می‌شود $(1, 1)$ رأس سهمی است.

x	y
0	3
1	1
2	3



ب) جدول زیر را کامل کرده و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{9}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	3	$\frac{1}{4}$	...



صفحه ۸۳

کار در کلاس

۲۵

نمودار تابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.

$$y = -x^2 + 6x - 10$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = 3$$

$$y = -3^2 + 6(3) - 10 = -1$$

$$S(3, -1)$$

x	...	1	2	3	4	5	...
y	...	-5	-2	-1	-2	-5	...

$$y = 2x^2 + 4x + 1$$

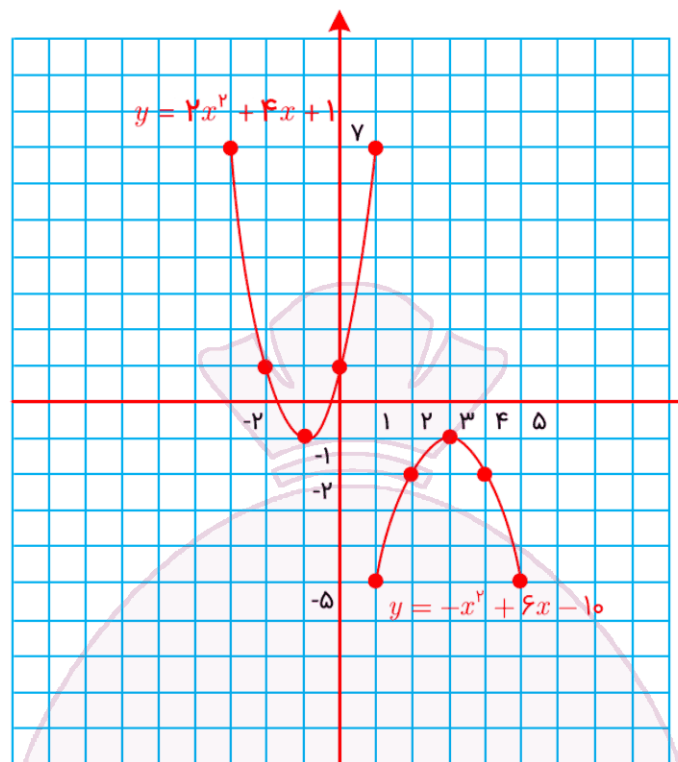
$$y = 2\left(x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = [(x+1)^2 - \frac{1}{2}]$$

$$y = 2(x+1)^2 - 1$$

$$S(-1, -1)$$

x	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	...
y	...	۷	۱	-۱	۱	۷	...



صفحه ۸۴

تمرین

۲۶

۱. نمودار سهمی‌ها به معادلات $y = x^2 - 2x$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.

$$y = x^2 - 2x$$

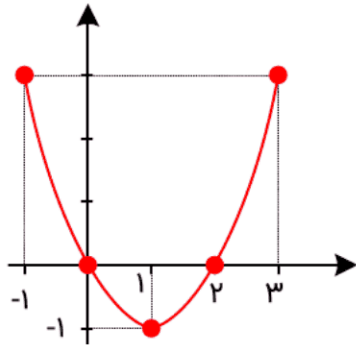
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = 1^2 - 2(1) = -1$$

$$S(1, -1)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

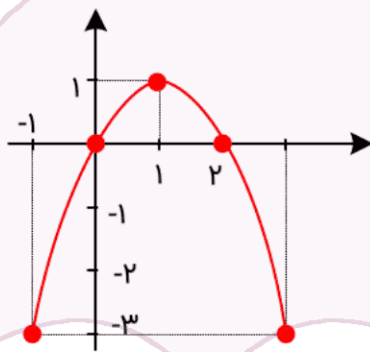
x	...	-۱	۰	۱	۲	۳	...
y	...	۳	۰	-۱	۰	۳	...



$$y = -(x-1)^2 + 1$$

$$S(1, 1)$$

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	-3	0	1	0	-3	...

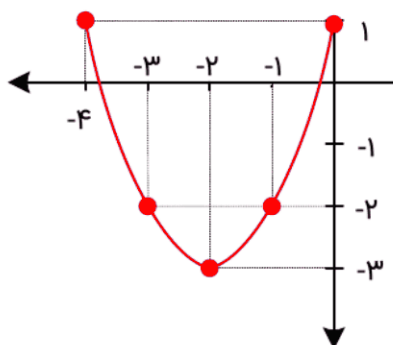


$$y = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 4 - 4 + 1$$

$$y = (x+2)^2 - 3$$

$$S(-2, -3)$$

x	...	-4	-3	-2	-1	0	...
y	...	1	-2	-3	-2	1	...



۲. اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ و تابع هزینه $y = 18x + 40$ باشد ماکسیمم مقدار سود را مشخص کنید.

$$y = R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$y = c(x) = 18x + 40$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 18x - 40 \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 40$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-\frac{1}{2})} = 12. \text{ تعداد واحد کالا تولید شده برای آنکه سود ماکزیمم شود ۱۲ است.}$$

$$P(12) = -\frac{1}{2}(12)^2 + 12(12) - 40$$

$$P(12) = -77 + 144 - 40 = 27$$

۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است، اگر اندازه یکی از اضلاع را با x و مساحت را با s نشان دهیم ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازاء چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیمم می‌شود.

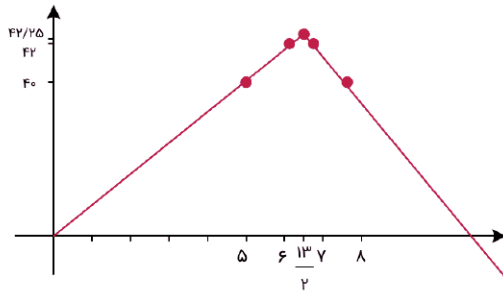
$$P = (x + y) \times 2 = 26 \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow y = 13 - x$$

$$s = xy \Rightarrow S = x \times (13 - x) = 13x - x^2$$

$$x = \frac{-13}{2(-1)} = \frac{13}{2}$$

$$y = 13 - x \Rightarrow y = 13 - \frac{13}{2} = \frac{13}{2}$$

x	...	۵	۶	$\frac{13}{2}$	۷	۸	...
y	...	۴۰	۴۲	۴۲/۲۵	۴۲	۴۰	...



۴. اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیمم شود.

$$2x + a = 100 \Rightarrow a = 100 - 2x$$

$$y = xa = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-100}{2(-2)} = 25 \Rightarrow x = 25$$

$$a = 100 - 2(25) = 50 \Rightarrow a = 50$$

۵. در یک تولیدی نوعی لامپ برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $C(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد: الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

$$C(x) = x^2 + 40x + 100 \text{ معادله هزینه}$$

$$R = x \times P \Rightarrow R(x) = 200x \Rightarrow P(x) = 200x - x^2 - 40x - 100 \Rightarrow P(x) = -x^2 + 160x - 100$$

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{2(-1)} \Rightarrow x = 80$$

پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

$$P(80) = -(80)^2 + 160(80) - 100 \Rightarrow P(80) = -6400 + 12800 - 100 \Rightarrow P(80) = 5400$$

توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



گام به گام ریاضی و آمار دهم انسانی - فصل چهارم

کار با داده‌های آماری

فهرست

۴	درس اول: گردآوری داده‌ها
۴	۱ فعالیت صفحه ۸۶ — تخمین وزن ماهی‌های حوضچه
۵	۲ فعالیت صفحه ۸۸ — گردآوری طول قد دانش‌آموزان
۶	۳ کار در کلاس صفحه ۹۰ — راه‌های دیگر آمارگیری قد و نمونه تصادفی
۶	۴ تمرین صفحه ۹۱ — انتخاب روش جمع‌آوری داده‌ها
۷	۵ کار در کلاس صفحه ۹۲ — روش مناسب جمع‌آوری داده‌ها و رفع محدودیت‌ها
۸	۶ کار در کلاس صفحه ۹۴ — بررسی تماشای برنامه تلویزیونی در شیراز
۸	۷ کار در کلاس صفحه ۹۵ — تعیین نوع متغیر داده‌ها
۹	۸ تمرین صفحه ۹۵ — نوع داده‌های مربوط به یک نماینده مجلس
۹	۹ فعالیت صفحه ۹۶ — استفاده شهروند از اطلاعات منتشرشده در رسانه‌ها
۱۰	۱۰ تمرین صفحه ۹۷ — داده و متغیر، آماره و پارامتر، مقیاس‌ها

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز ۱۱

۱۱ کار در کلاس صفحه ۱۰۰ — محاسبه میانگین داده‌ها ۱۱

۱۲ تمرین صفحه ۱۰۱ — محاسبه میانه ۱۲

۱۳ کار در کلاس صفحه ۱۰۳ — داده دورافتاده، میانه و میانگین ۱۳

درس سوم: معیارهای پراکندگی ۱۳

۱۴ فعالیت صفحه ۱۰۳ — مقایسه پراکندگی نمرات سه کلاس دهم ۱۳

۱۵ کار در کلاس صفحه ۱۰۴ — انحراف معیار نمرات سه کلاس ۱۵

۱۶ فعالیت صفحه ۱۰۵ — معنای عدد 10 ± 250 گرم روی بسته‌بندی ۱۶

۱۷ کار در کلاس صفحه ۱۰۶ — قاعده تجربی: $99/9$ ، 96 و 68 درصد ۱۶

۱۸ فعالیت صفحه ۱۰۶ — انحراف معیار و دامنه میان چارکی درآمد اعضای انجمن خیریه ۱۷

۱۹ کار در کلاس صفحه ۱۰۸ — تکمیل جمله‌ها: معیارهای مرکزی و پراکندگی ۱۸

۲۰ تمرین صفحه ۱۰۹ — نمونه‌گیری، روش‌های گردآوری، مقیاس‌ها و معیارهای مرکزی و پراکندگی ۱۹

توشه‌ای برای موفقیت

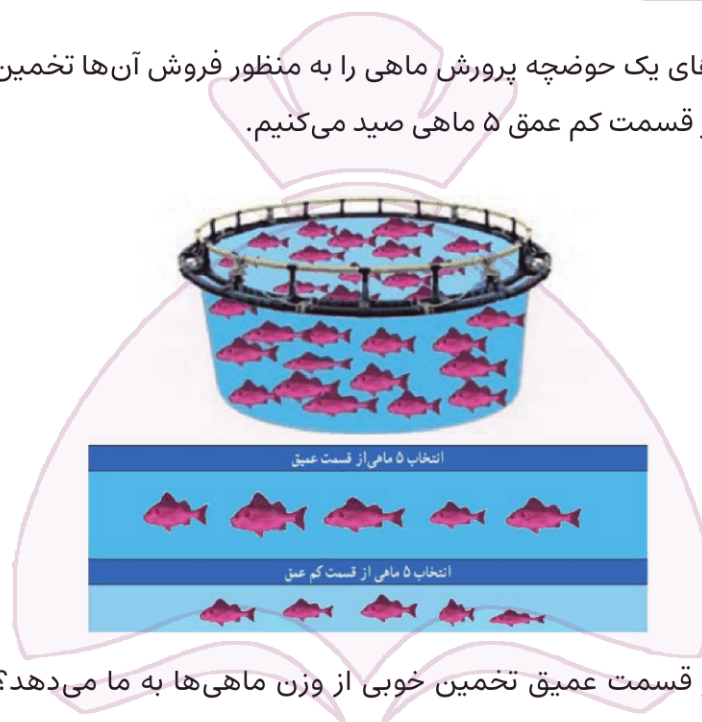
درس اول: گردآوری داده‌ها

صفحه ۸۶

فعالیت

۱

می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچه پرورش ماهی را به منظور فروش آن‌ها تخمین بزنیم. ابتدا از قسمت عمیق و در مرحله بعد از قسمت کم عمق ۵ ماهی صید می‌کنیم.



۱. آیا انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق تخمین خوبی از وزن ماهی‌ها به ما می‌دهد؟ یعنی آیا می‌توان برای فروش آن‌ها اعلام آمادگی کرد؟ **خیر**

۲. به نظر شما کدام تخمین بیش از مقدار واقعی است و کدام یک کمتر از مقدار واقعی؟

انتخاب از قسمت عمیق تخمین بیشتری از مقدار واقعی می‌باشد و انتخاب از قسمت کم عمق تخمین کمتری از مقدار واقعی می‌باشد.

۳. اگر شما امکان صید ۵ ماهی داشتید چگونه آن‌ها را انتخاب می‌کردید که منجر به تخمین بهتری از وزن ماهی‌های حوضچه می‌شد؟ فرض کنید ماهی‌ها همانند شکل در حوضچه پخش شده و تحرک زیادی ندارند.

سعی می‌کردیم به صورت تصادفی از جاهای مختلف حوضچه یک نمونه تصادفی انتخاب نمائیم.

۴. اگر از نحوه پخش شدن ماهی‌ها اطلاعی نداشتیم، بهتر بود ۵ ماهی را چگونه انتخاب می‌کردیم؟ آیا انتخاب تصادفی چند بخش از حوضچه (مثلاً زمانی که آن را شطرنجی کرده‌ایم) به ما کمک می‌کند ماهی‌های انتخابی معرف بهتری از کل ماهی‌ها باشند؟ **بله**

می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک مدرسه را گردآوری کنیم. برای این منظور چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟
برای این کار می‌توانیم از تک تک دانش‌آموزان در مورد قدشان سؤال کنیم.

آمارگیری: گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن.

آمارگر: کسی که آمارگیری را انجام می‌دهد

اگر قرار شد آمارگر باشیم، می‌توان جدولی به صورت زیر تکمیل کنیم.

مثالی از جدول طراحی شده برای ثبت مشاهدات

اندازه طول قد	چوب خط برای شمارش	تعداد دانش‌آموزان
کوتاه‌تر از ۱۴۰ سانتی‌متر		
۱۴۰-۱۴۹ سانتی‌متر		
۱۵۰-۱۵۹ سانتی‌متر		
۱۶۰-۱۶۹ سانتی‌متر		
۱۷۰ سانتی‌متر یا بلندتر		

چگونه مطمئن می‌شوید که دانش‌آموزی از قلم نیفتاده است؟ چه راه کاری برای این منظور پیشنهاد می‌دهید؟
سرشماری می‌کنیم تا مطمئن شویم دانش‌آموزی از قلم نیفتاده است و البته باید تعداد چوب خط‌ها با تعداد کل دانش‌آموزان مدرسه برابر باشد. - از لیست اسامی کلاس استفاده می‌کردیم.

آمارگیری زحمت زیادی برای آمارگر دارد آیا راه حل ساده‌تری برای انجام آن دارید؟
استفاده از پرونده تحصیلی دانش‌آموزان برای آگاهی از قد آن‌ها و یا توزیع پرسش‌نامه

یکی از مرسوم‌ترین راه‌های آمارگیری استفاده از پرسش‌نامه است. پرسش‌نامه شبیه همان جدولی است که هنگام ثبت نام در مدرسه، شما یا والدین، آن را تکمیل کرده‌اید. پرسش‌نامه می‌تواند توسط واحدهای جامعه یا نمونه تکمیل شود.

توشه‌ای برای موفقیت

۱. چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش‌آموزان یک مدرسه پیشنهاد می‌کنید؟
آزمایش و اندازه‌گیری مستقیم، می‌توانیم قد یکایک دانش‌آموزان مدرسه را توسط یک متر اندازه بگیریم.
۲. فرض کنید زمان لازم برای گردآوری تمامی داده‌های دانش‌آموزان در اختیار نداشته باشید. اگر بخواهیم نمونه‌ای انتخاب و آمارگیری انجام دهیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید که نمونه تصادفی انتخاب شود؟
از هر کلاس ۵ نفر به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و قد آن‌ها را محاسبه و میانگین قد‌ها را به عنوان معرف قد جامعه در نظر می‌گیریم.

- کدام روش جمع‌آوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.
۱. میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آن‌ها.
پرسش‌نامه، می‌توان با طرح پرسش‌نامه از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست‌های مشتریان پی برد.
 ۲. سن همه دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایه دهم.
دادگان‌ها، معمولاً هنگام ثبت نام دانش‌آموز کپی شناسنامه دانش‌آموز دریافت می‌شود می‌توان از اطلاعات شناسنامه سن دانش‌آموز را دقیق بررسی کرد.
 ۳. تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.
مشاهده مستقیم، تعداد سرنشینان خودروهای سواری موضوعی است که به سادگی قابل رؤیت و مشاهده است بنابراین از روش مشاهده مستقیم استفاده می‌کنیم.

ایران نوین
توشه‌ای برای موفقیت

الف) کدام روش برای جمع‌آوری داده‌ها مناسب است؟

۱. تعداد قلم‌های هر دانش‌آموز در یک کلاس. **پرسش شفاهی یا مشاهده**

۲. ساعات خواب دانش‌آموزان کلاس درس شما در شب گذشته. **پرسش شفاهی**

۳. طول قد دانش‌آموز یک کلاس. **آزمایش و اندازه‌گیری یکایک دانش‌آموزان کلاس یا پرسش‌نامه.**

ب) می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش زیر آمارگیری کنیم. هریک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را رفع کرد؟

پرسش‌نامه: هنگامی که تعداد دانش‌آموزان زیاد است از روش نمونه‌گیری تصادفی استفاده می‌کنیم.

مشاهده: می‌توانیم مشاهده خود را همراه با دقت کنیم و از وسایل اندازه‌گیری هم مثل متر استفاده کنیم.

یا از طریق تقسیم‌بندی به چند قسمت کوتاه، بلند و متوسط می‌توان این مشکل را تا حدودی برطرف کرد.

دادگان: می‌بایست دادگان به روز باشد تا بتوان جهت مشخص کردن اندازه طول قد دانش‌آموزان استفاده کرد.

پرسش‌نامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.

مشاهده: اگر به دقت زیادی نیاز داریم، مناسب نیست.

دادگان: همیشه اطلاعات ثبتي را در اختیار آمارگیر قرار نمی‌دهند.

ایران نوین
توشه‌ای برای موفقیت

یک شبکه تلویزیونی می‌خواهد نسبت دارندگان تلویزیون در شیراز، که برنامه جدید این شبکه را حداقل یک بار در هفته تماشا می‌کنند، بداند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تلویزیون را در این شهر مورد بررسی قرار می‌دهد.

الف) داده‌ها و متغیر مورد بررسی را مشخص کنید.

جواب: داده‌ها اطلاعات گروه ۱۰۰۰ نفری دارندگان تلویزیون در شیراز هستند، و متغیر، تماشای تلویزیون است. که پاسخ آن «تماشا می‌کند» یا «تماشا نمی‌کند» افراد مورد بررسی است.

ب) آیا این داده‌ها یک نمونه هستند؟ جامعه آماری کدام است؟

بله یک نمونه هستند، جامعه اصلی کل اطلاعات مردم شیراز می‌باشد که تلویزیون دارند و این برنامه جدید را تماشا می‌کنند.

پ) متغیر کمی است یا کیفی؟ کیفی است.

ت) چند متغیر کمی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

جواب: سن، درآمد، ... وزن، میزان تحصیلات، میزان بارندگی شهر شیراز، تعداد افرادی که برنامه جدید را تماشا می‌کنند.

ث) نسبت افرادی در نمونه که برنامه جدید را تماشا می‌کنند، آماره است یا پارامتر؟ (تعداد اعضای مورد نظر تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می‌گوییم.)

آماره است. (در نمونه‌ی آماری که از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر حاصل شود آماره می‌گویند در حالی که پارامترهای جامعه همیشه ثابت‌اند در این مثال اگر یک نمونه ۱۰۰۰ نفری دیگر انتخاب می‌شد ممکن بود همین داده‌ها دقیقاً به دست نمی‌آمد و تغییر می‌کرد بنابراین این نسبت آماره است.)

نوع متغیر داده‌ها را مشخص کنید.

الف) محسن، محمود، محمد و میثم همگی اسامی مذکر هستند. متغیر کیفی اسمی

ب) در یک دبیرستان ۳۱۹ دانش‌آموز فارغ‌التحصیل وجود دارد. احمد رتبه بیست و پنجم، رضا رتبه نوزدهم، صادق رتبه دهم و جواد رتبه چهارم هست و می‌دانیم که رتبه یک بالاترین است. ۳۱۹ نسبتی و رتبه‌ها کیفی ترتیبی

پ) دمای بدن ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه هراز (برحسب سلسیوس). کمی فاصله‌ای

ت) طول ماهی‌های قزل‌آلا در رودخانه هراز. کمی نسبتی

داده‌های زیر مربوط به یک نماینده مجلس است. در هر یک از سؤالات زیر نوع داده‌ها را مشخص کنید.

الف) نام نماینده حسین ایرانی است. **متغیر کیفی اسمی**

ب) این نماینده ۵۸ سال سن دارد. **متغیر کمی نسبتی**

پ) سال‌هایی که این نماینده در مجلس انتخاب شده است، ۱۳۸۶ و ۱۳۹۰ و ۱۳۹۴ است. **کمی فاصله‌ای**

ت) مجموع حقوق این نماینده در سال گذشته ۶۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. **کمی نسبتی**

ث) این نماینده در حال بررسی لایحه پیشنهادی حفاظت از منابع آبی کشور است. گزینه‌های موردنظر: حمایت کامل، حمایت، بی‌طرف، مخالف و کاملاً مخالف است. **کیفی ترتیبی**

ج) وضعیت تأهل این نماینده: «متاهل» است. **کیفی اسمی**

چ) می‌گویند این نماینده در رأی‌گیری لایحه مرتبط با آموزش عمومی، هفتمین نفری است که از آن حمایت کرده است. **کیفی ترتیبی**

به نظر شما یک شهروند در زندگی روزمره خود چه استفاده‌ای از اطلاعات بیان شده در دو مثال زیر، که در رسانه‌ها منتشر شده، می‌برد؟

■ سلامت

بیشترین آسیب دیدگی در منازل افتادن یا زمین خوردن است.

پنج درصد افراد به واکسن آنفولانزا واکنش شدید نشان می‌دهند.

افراد سیگاری دو برابر دیگران در معرض سرطان قرار دارند.

مصرف روزانه ۵ نوع میوه و سبزی بیشتر ویتامین‌های موردنیاز بدن را تأمین می‌کند.

■ حمل و نقل

اولین دلیل تماس با امداد خودرو فراموش کردن کلید داخل خودرو است.

بیشتر راننده‌های مرد و زن یک کشور خارجی در پشت چراغ قرمز به ترتیب با بینی خود کلنجار می‌روند و در آینه نگاه می‌کنند.

راندن بین خطوط راهنمایی در اتوبان‌ها باعث کاهش ۳۰ درصدی ترافیک می‌شود.

متوسط تعداد کشته‌های تصادفات حدود ۵۰ نفر در روز اعلام شده است.

یک شهروند بعد از اینکه متوجه اطلاعات بیان شده در رسانه‌ها می‌گردد سعی می‌کند در زندگی روزمره خود رفتار صحیح را انتخاب کند و از رفتارهای ناصحیح و پر خطر اجتناب بورزد.

چگونه این اطلاعات را به دست آورده‌اند؟ این اطلاعات بر اساس مشاهده و اندازه‌گیری به دست آمده‌اند. آیا تعریف دقیق کلمات پررنگ شده را حدس می‌زنید. جامعه، و پارامتر یا نمونه و آماره را در هریک از مثال‌ها مشخص کنید.

جامعه کل منازل شهر. نمونه: تعدادی از منازل شهر که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند.

به مطالعه‌ی نحوه گردآوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج اطلاعات و تصمیم‌گیری، آمار گفته می‌شود.

صفحه ۹۷

تمرین

۱۰

۱. فرق بین داده و متغیر چیست؟

به اطلاعات کمی یا کیفی یک مسئله داده گفته می‌شود. در صورتی که به ویژگی‌هایی که از اشخاص یا اشیاء که قرار است مورد بررسی قرار گیرند، متغیر می‌گویند.

۲. داده‌های در سطح اسمی، کمی هستند یا کیفی؟ کیفی هستند.

۳. فرق بین آماره و پارامتر چیست؟

پارامتر یک مشخصه عددی است که جنبه‌ای خاص از جامعه را توصیف می‌کند و ما به داده‌های تک‌تک اعضای جامعه دسترسی داریم اما آماره یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و ما به داده‌های نمونه دسترسی داریم و به کل جامعه دسترسی نداریم و ما در آماره برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنیم.

۴. در یک جامعه آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ خیر، پارامترهای جامعه همیشه ثابت می‌باشند. اگر سه نمونه با اندازه یکسان از یک جامعه داشته باشیم، آیا می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟ بله، در نمونه‌های آماری از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر ایجاد می‌شود، بنابراین ممکن است سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آوریم.

۵. در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاهخوار، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند؟

الف) متغیر را مشخص کنید. وعده غذا (ناهار یا شام)

ب) این متغیر کمی است یا کیفی؟ کیفی

پ) جامعه آماری در اینجا چیست؟ ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاهخوار

۶. موضوعات زیر مرتبط است. متغیرهای آنها را در چهار مقیاس: اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی دسته‌بندی کنید.

الف) مدت زمان پاسخ‌گویی به سؤالات یک امتحان. **نسبتی**

ب) زمان اولین کلاس. **فاصله‌ای**

پ) رشته تحصیلی. **اسمی**

ت) مقیاس ارزیابی تحصیلی: ضعیف، معمولی و خوب. **ترتیبی**

ث) نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز). **فاصله‌ای**

ج) سن دانش‌آموز. **نسبتی**

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز

صفحه ۱۰۰

کار در کلاس

۱۱

۱. میانگین داده‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ چقدر است؟

$$\bar{x} = \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50}{5} = \frac{150}{5} = 30$$

۲. اگر میانگین داده‌های ۱۰، x، ۴۰ برابر ۳۰ شود مقدار x چقدر است؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n \times \bar{x}$$

$$\Rightarrow 40 + x + 10 = 3 \times 30 \Rightarrow 50 + x = 90 \Rightarrow x = 90 - 50 = 40$$

۳. میانگین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چقدر است؟

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

۴. میانگین اعداد ۲، ۴، ۶، ۸، ۵ چقدر است؟

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 5}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

۵. میانگین اعداد ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چقدر است؟

$$\bar{x} = \frac{5+6+7+8+9}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

۶. میانگین اعداد ۵۰, ۶۰, ۷۰, ۸۰, ۹۰ چقدر است؟

$$\bar{x} = \frac{50+60+70+80+90}{5} = \frac{350}{5} = 70$$

۷. آیا می‌توانید چند قاعده کلی از تمرین‌های قبل درباره خواص میانگین ذکر کنید.

۱) اگر داده‌ها همگی در یک عدد ضرب شوند میانگین آن‌ها نیز در آن عدد ضرب می‌شود.

۲) اگر همه داده با یک مقدار ثابت جمع شوند میانگین آن‌ها نیز با آن عدد جمع می‌شود.

حال اگر یک میلیارد در درآمد ماهیانه یک میلیارد ریال به انجمن خیریه دبیرستان ما بیاید، میانگین درآمد حضار چه تغییری می‌کند؟ (بیشتر مردم به او ثروتمند می‌گویند، آمارشناسان او را داده دورافتاده می‌خوانند.) درآمد او میانگین درآمد را تا کمی بالاتر از ۱۴۸ میلیون ریال در ماه بالا می‌آورد (دقیقاً ۱۴۸/۶۲۵) و بر اساس شیوه تخمین گذشته، خیرین کمکی معادل ۱۷۸ میلیون ریال را به دبیرستان خواهند داشت! که غیرواقعی به نظر می‌رسد یا امکان محقق شدن آن ضعیف است.

صفحه ۱۰۱

تمرین

۱۲

۱. میانه داده‌های ۱, ۹۹, ۶۸, ۲, ۸۶, ۱۴, ۱۰ چقدر است؟ ۱۴

۲. میانه داده‌های ۱, ۹۹, ۶۸, ۲, ۸۶, ۱۴, ۱۰, ۱۱ چقدر است؟

$$\text{میانه} = \frac{11+14}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

با سه واژه: داده دورافتاده، میانه، میانگین نتایج درس را ۵ جمله زیر کامل کنید

۱. آنچه اکثر مردم «حد وسط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به «.....» معروف است. برای محاسبه ، به داده‌های خود به عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همه اعداد را باهم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید. **میانگین - میانگین**

۲. در واقع نقطه وسطی فهرست اعداد مرتب شده است. نیمی از اعداد مقادیر بالاتر از و نیمی دیگر مقادیر پایین‌تر از قرار دارند. **میانه - میانه - میانه**

۳. زمانی با مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌هایمان پیروی نکند. **داده دور افتاده**

۴. وقتی با مواجه هستید، معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا **داده دور افتاده - میانه - میانگین**

۵. به طور کلی، برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری، بهتر از است. **میانگین - میانه**

درس سوم: معیارهای پراکندگی

می‌خواهیم کلاس‌های دهم سه دبیرستان را بر اساس نتایج آزمون جامعی که هم‌زمان بین دانش‌آموزان ممتاز برگزار شده است، رتبه‌بندی کنیم. از هر دبیرستان ۱۰ نفر به تصادف انتخاب شده است. نمرات آزمون جامع هر سه کلاس از ۱۲۰ نمره است. داده‌های مربوط به سه کلاس دهم:

(۶۵، ۷۵، ۷۳، ۵۰، ۶۰، ۶۴، ۶۹، ۶۲، ۶۷، ۸۵ آ)

(۸۵، ۷۹، ۵۷، ۳۹، ۴۵، ۷۱، ۶۷، ۸۷، ۹۱، ۴۹ ب)

(۴۳، ۵۱، ۵۳، ۱۱۰، ۵۰، ۴۸، ۸۷، ۶۹، ۶۸، ۹۱ پ)

اگر میانگین نمرات این سه کلاس «آ»، «ب»، «پ» با هم برابر باشند، میانگین سه کلاس را محاسبه کنید.

$$\bar{x} = \frac{65 + 75 + 73 + 50 + 60 + 64 + 69 + 62 + 67 + 85}{10} = \frac{670}{10} = 67$$

میانگین کلاس آ

$$\bar{x} = \frac{85 + 79 + 57 + 39 + 45 + 71 + 67 + 87 + 91 + 49}{10} = \frac{670}{10} = 67$$

میانگین کلاس ب

$$\bar{x} = \frac{۴۳ + ۵۱ + ۵۳ + ۱۱۰ + ۵۰ + ۴۸ + ۸۷ + ۶۹ + ۶۸ + ۹۱}{۱۰} = \frac{۶۷۰}{۱۰} = ۶۷$$

میانگین کلاس پ

به نظر شما پراکندگی نمرات در کدام کلاس بیشترین و در کدام کلاس کمترین است؟

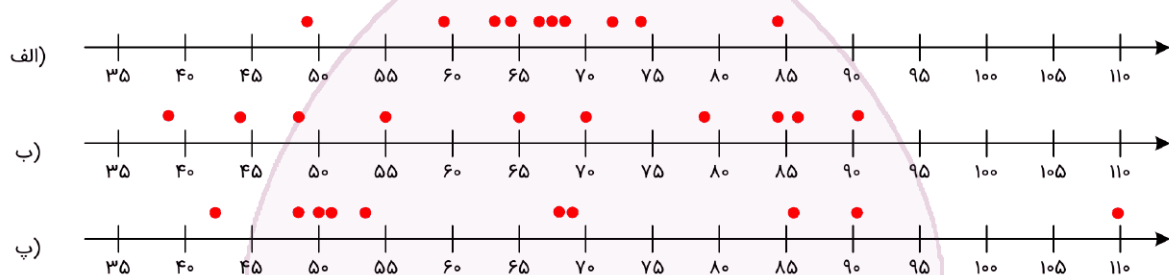
دامنه کلاس (الف) = تا ۸۵ ۵۰

دامنه کلاس (ب) = تا ۸۷ ۳۹

دامنه کلاس (پ) = تا ۱۱۰ ۴۳

با توجه به دامنه نمرات سه دبیرستان که به صورت زیر است می‌توان نتیجه گرفت که دبیرستان (ب) بیشترین پراکندگی و دبیرستان (الف) کمترین پراکندگی را دارد.

برای پاسخ به این سؤال، داده‌ها را روی سه محور موازی نمایش دهید. کدام دبیرستان نتایج بهتری با اطلاعات داده شده کسب کرده است؟ چرا؟ با توجه به اطلاعات داده شده به نظر می‌رسد دبیرستان الف به دلیل پراکندگی کمتر نتایج بهتری کسب کرده است. همچنین دبیرستان پ دارای یک نمره خیلی بالا ۱۱۰ است.



مثلاً اگر والدین برای ثبت‌نام فرزند بازی‌گوش خود در سال آینده بخواهند بر اساس این نتایج یکی از مدرسه‌ها را انتخاب کنند آن مدرسه‌های بهتر است که پراکندگی نمرات در آن کمتر است در مقابل برای فرزندی که به قصد شرکت در المپیاد می‌خواهد مدرسه را انتخاب کند مدرسه‌ای است که پراکندگی نمرات در آن بیشتر باشد. چرا؟ در مدرسه‌ای که پراکندگی نمرات کمتر است دانش‌آموز بازی‌گوش به علت یک دست بودن کلاس مجبور به هماهنگی با سایر دانش‌آموزان کلاس است. ولی در مدرسه‌ای که پراکندگی نمرات بیشتر است (مثلاً دبیرستان پ) فضای رقابتی‌تری وجود دارد که دانش‌آموز المپیادی را مجبور به تلاش بیشتر می‌کند.

۱. اگر داده‌ها باهم برابر باشند انحراف استاندارد برابر صفر خواهد شد. چرا؟

در این حالت میانگین برابر هر یک از داده‌ها می‌شود و در نتیجه اختلاف هر داده از میانگین برابر صفر خواهد شد که در نتیجه انحراف معیار نیز صفر می‌شود.

۲. انحراف استاندارد نمرات آزمون جامع سه کلاس را می‌توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.

مشاهدات			انحراف مشاهدات از میانگین			انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲		
کلاس آ	کلاس ب	کلاس پ	$x_1 - \bar{x}$	$x_1 - \bar{x}$	$x_1 - \bar{x}$			
۵۰	۳۹	۴۳	-۱۷	-۲۸	-۲۴	۲۸۹	۷۸۴	۵۷۶
۶۰	۴۵	۴۸	-۷	-۲۲	-۱۹	۴۹	۴۸۴	۳۶۱
۶۲	۴۹	۵۰	-۵	-۱۸	-۱۷	۲۵	۳۲۴	۲۸۹
۶۴	۵۷	۵۱	-۳	-۱۰	-۱۶	۹	۱۰۰	۲۵۶
۶۵	۶۷	۵۳	-۲	۰	-۱۴	۴	۰	۱۹۶
۶۷	۷۱	۶۸	۰	۴	۱	۰	۱۶	۱
۶۹	۷۹	۶۹	۲	۱۲	۲	۴	۱۴۴	۴
۷۳	۸۵	۸۷	۶	۱۸	۲۰	۳۶	۳۲۴	۴۰۰
۷۵	۸۷	۹۱	۸	۲۰	۲۴	۶۴	۴۰۰	۵۷۶
۸۵	۹۱	۱۱۰	۱۸	۲۴	۴۳	۳۲۴	۵۷۶	۱۸۴۹
			جمع			۸۰۴	۳۱۵۲	۴۵۰۸

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{804}{10}} = 8.97 \quad \text{انحراف معیار کلاس آ}$$

$$\bar{x} = \frac{670}{10} = 67 \quad \text{کلاس آ}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{3152}{10}} = 17.75 \quad \text{انحراف معیار کلاس ب}$$

$$\bar{x} = \frac{670}{10} = 67 \quad \text{کلاس ب}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{4508}{10}} = 21.234 \quad \text{انحراف معیار کلاس پ}$$

$$\bar{x} = \frac{670}{10} = 67 \quad \text{کلاس پ}$$

مشاهده می‌شود که انحراف استاندارد نه تنها نظر شما در خصوص کلاس با بیشترین پراکندگی نمرات را تأیید می‌کند، به شما امکان مقایسه کمی آن‌ها را نیز می‌دهد. حال می‌توانید درستی پاسخ‌های خود را بررسی کنید.

حتماً بر روی قوطی‌ها یا پاکت‌های مواد غذایی یا بهداشتی اعدادی به صورت زیر مشاهده کرده‌اید. به نظر شما هر یک از این اعداد چه چیزی را نشان می‌دهند.

$$250 \pm 10 \text{ گرم}$$

عدد ۲۵۰ وزن خالص ماده غذایی است که قرار است به دست مصرف‌کننده برسد. ولی معمولاً این چنین نیست. کمی خطا اجتناب‌ناپذیر است. این خطا چقدر است و چگونه آن را محاسبه کنیم. اگر تعداد زیادی محتوای پاکت‌های تولید شده یک کالا از این تولیدی به خصوص را وزن و انحراف استاندارد آن‌ها را محاسبه کنیم، دو برابر آن عدد ۱۰ است. یعنی عدد ۱۰ دو برابر انحراف استاندارد مواد غذایی در بسته‌بندی‌های مختلف است. به عبارت دقیق‌تر اگر ما ۱۰۰ قوطی حاوی این ماده غذایی را وزن کنیم انتظار داریم ۹۵ تا از آن‌ها وزنی بین ۲۴۰ تا ۲۶۰ گرم داشته باشند. درج چنین اعدادی بر روی کالاها از الزامات استاندارد هر کشوری است. چگونه به عدد ۹۶ رسیده‌اند؟ **به کمک فاصله دو برابر انحراف معیار از میانگین**

برای پی بردن به میزان تغییراتی که داریم معمولاً با محاسبه مقدار انحراف از میانگین اطلاعات دقیق‌تری در خصوص میانگین و انحراف معیار خواهیم داشت. برای این منظور از یک قانون مشهور در آمار استفاده می‌کنیم: که تقریباً ۹۵٪ مشاهدات بین دو انحراف استاندارد از میانگین هستند. این مانند آن است که بگوییم، ۵٪ نمرات بیش از دو برابر انحراف استاندارد از میانگین فاصله دارد. البته مشابه همین قانون در شکل بالا برای یک برابر انحراف استاندارد نمایش داده شده است. در این حالت قانون قبل به تقریباً ۶۸٪ مشاهدات بین یک انحراف استاندارد از میانگین هستند تغییر می‌کند. یک برابر انحراف از میانگین را روی همان شکل رسم کنید.

جدول زیر را تکمیل کنید.

$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$	تقریباً ۹۹/۹ مشاهدات بین سه برابر انحراف استاندارد از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	تقریباً ۹۶٪ مشاهدات بین دو برابر انحراف استاندارد از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	تقریباً ۶۸٪ مشاهدات بین یک برابر انحراف استاندارد از میانگین قرار دارند

می‌خواهیم با همان مثال خیریه درس قبل بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف استاندارد مجموعه داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همه به هم نزدیک هستند؛ اگر انحراف استاندارد بزرگ باشد، بدین معناست که درآمد افراد آن انجمن بسیار متفاوت است. انحراف استاندارد درآمد اعضا به صورت زیر محاسبه می‌شود. به کمک جدول زیر این کار را انجام دهید.

انحراف مشاهدات از میانگین توان ۲		انحراف مشاهدات از میانگین		مشاهدات	
بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد
۱۶۳۸۴	۱۶۹	$x_i - \bar{x}$ $۴۰ - ۲۷ = ۱۳$	$x_i - \bar{x}$ $۴۰ - ۱۴۸ = -۱۰۸$	۴۰	۴۰
۱۸۴۹۶	۲۲۵	-۱۵	-۱۳۶	۱۲	۱۲
۱۴۴۰۰	۱	۱	-۱۲۰	۲۸	۲۸
۲۵۶	۲۵	۵	-۱۱۶	۳۲	۳۲
۱۳۹۲۴	۹		-۱۱۸	۳۰	۳۰
۱۵۸۷۶	۲۵	-۵	-۱۲۶	۲۲	۲۲
۱۵۱۲۹	۴	-۲	-۱۲۳	۲۵	۲۵
۷۲۵۹۰۴	-	-	۸۲۵	۱۰۰۰	-
۸۲۰۳۶۹	جمع ۴۵۸			$\bar{x} = ۱۴۸ / ۶۲۵ \approx ۱۴۸$	$\bar{x} = ۲۷$

$$\sigma = \sqrt{\frac{۴۵۸}{۷}} \approx ۸ \quad \sigma = \sqrt{\frac{۸۲۰۳۶۹}{۸}} \approx ۳۲۰$$

زمانی که میلیارد وارد انجمن خیریه می‌شود، انحراف استاندارد داده‌ها برابر است با ۳۲۰ این دو مقدار باهم اختلاف زیادی دارند. چرا و چه باید کرد؟ زمانی را به خاطر بیاورید که ما معیار گرایش به مرکز را برای این داده‌ها محاسبه کردیم. ما برای رفع آن مشکل به جای میانگین، میانه را به کار بردیم. مشابه همان کار را می‌توانیم انجام دهیم. معیار پراکندگی که تعریف می‌شود، انحراف استاندارد نیست. ما آن را دامنه میان چارکی، که با IQR نشان می‌دهیم، می‌نامیم که با یک چهارم و سه چهارم مشاهدات هستند. به عبارت ساده‌تر اگر برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم همان چارک اول است و به همین صورت میانه داده‌های بعد از میانه، چارک سوم خواهد بود. برای سادگی از نمادهای Q_1 ، Q_2 ، Q_3 به ترتیب برای چارک اول، میانه (چارک دوم)، و چارک سوم استفاده می‌شود.

جدول زیر را برای مثال خیرین مدرسه تکمیل کنید.

σ انحراف استاندارد	IQR دامنه میان چارکی	Q_3 چارک سوم	Q_2 میانه	Q_1 چارک اول	
۸	$32 - 22 = 10$	۳۲	۲۸	۲۲	درآمد ماهیانه اعضای خیریه
۳۲۰	$36 - 23 / 5 = 12 / 5$	۳۶	۲۹	$23 / 5$	درآمد بعد از ورود میلیارد

این اعداد امکان مشاهده چند چیز را به شما می‌دهند: میلیارد مسبب درهم‌ریختگی میانگین درآمد و انحراف استاندارد بوده است. اما میانه و دامنه میان چارکی همچنان ثابت ماندند. این یکی از دلایلی است که ما می‌گوییم، اگر داده دورافتاده داشته باشیم، از میانه (و در نتیجه دامنه میان چارکی) به جای میانگین استفاده کنید، نتیجه بهتری از داده‌ها به دست می‌آورید. زمانی که تعداد داده‌ها زیاد باشد به نحو دیگری می‌توان از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی نتیجه بگیرید که داده دورافتاده وجود داشته است.

صفحه ۱۰۸

کار در کلاس

۱۹

جملات زیر را کامل کنید:

- ۱- میانگین‌ها و میانه‌ها برای توصیف مجموعه داده‌ها مفید هستند. (میانگین) و (میانه) انواعی از معیارهای مرکزی هستند.
- ۲- شما معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می‌خواهید، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار (انحراف معیار) است.
- ۳- معیار پراکندگی که معمولاً با میانگین بیان می‌شود، (انحراف معیار) است.
- ۴- معیار پراکندگی که معمولاً با میانه بیان می‌شود، (دامنه میان چارکی) نام دارد.
- ۵- (میانه) و (دامنه میان چارکی) اطلاعات سریعی درباره داده‌ها بدون نیاز به هرگونه محاسبه می‌دهند.
- ۶- آماری که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین‌ها و میانه‌ها، انحرافات معیار و دامنه‌های میان چارکی به کار می‌رود، (آمار توصیفی) دارد.
- ۷- ۵۰ درصد داده‌ها قبل از (چارک دوم (میانه)) و ۵۰ درصد داده‌ها بعد از (چارک دوم (میانه)) قرار دارند.
- ۸- ۷۵ درصد داده‌ها قبل از (چارک سوم) یا بعد از (چارک اول) قرار دارند.
- ۹- ۲۵ درصد داده‌ها قبل از (چارک اول) یا بعد از (چارک سوم) قرار دارند.
- ۱۰- ۵۰ درصد داده‌ها بین (چارک اول) و (چارک سوم) قرار دارند.
- ۱۱- تقریباً ۹۵٪ مشاهدات در فاصله (دو برابر انحراف معیار) از میانگین هستند.
- ۱۲- تقریباً ۶۸٪ مشاهدات در فاصله (یک برابر انحراف معیار) از میانگین هستند.

۱- یک نمونه ۲ تایی از بین اعداد ۱ تا ۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه حتماً تصادفی باشد چه راهی پیشنهاد می‌کنید. اگر بخواهید اعضای انتخابی این نمونه تصادفی تکراری نباشند چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

اعداد را روی کاغذ نوشته داخل کیسه قرار داده و از کیسه در می‌آوریم - عدد بیرون آورده شده را دیگر داخل کیسه قرار نمی‌دهیم.

۲- سؤال ۱ را برای اعداد ۱ تا ۳۶ تکرار کنید. (راهنمایی می‌توانید از پرتاب دو تاس به عنوان روشی برای انتخاب اعداد ۱ تا ۳۶ استفاده کنید)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						
۵						
۶						

۳- مجموعه افراد فامیل درجه اول و درجه دوم خود را بنویسید و آن‌ها را شماره‌گذاری کنید. سپس یک نمونه ۴ تایی از این جامعه انتخاب کنید. موضوعات زیر را در نظر بگیرید. درباره بهترین روش جمع‌آوری داده برای این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید:

الف) بیشتر مردم فکر می‌کنند «حداکثر سرعت در اتوبان‌ها باید تعیین شود» **مصاحبه**

ب) آبی، رنگ مورد علاقه بیشتر مردم برای ماشین است. **از طریق پرسش‌نامه**

پ) در زمان مطالعه گوش دادن به موسیقی کلاسیک به یادگیری کمک می‌کند. **از طریق مشاهده**

ت) بیشتر تصادفات اتومبیل‌ها را رانندگان با سن کمتر از ۲۵ سال موجب می‌شوند. **از طریق دادگان**

ث) رژیم گرفتن، موجب کاهش هوش می‌شود. **از طریق مشاهده**

۴- دو موضوع برای هر یک از روش‌های جمع‌آوری داده بیان کنید.

الف) از طریق مصاحبه: ۱) استفاده از پل عابر برای عبور از عرض خیابان ۲) میزان علاقه‌مندی افراد به

فصل‌های سال

ب) از طریق مشاهده: ۱) تعداد ماشین‌های گذشته از یک تقاطع خاص ۲) تعداد سرنشینان ماشین‌ها.

پ) از طریق دادگان: ۱) مقدار مصرف آب تهران در یک روز خاص در سه سال گذشته ۲) تعداد تصادفات

نوروزی در سال‌های قبل

ث) از طریق پرسش نامه: ۱) میزان درآمد خانواده‌ها ۲) میزان علاقه‌مندی افراد نسبت به برنامه‌های مختلف تلویزیونی

۵- کدام یک از نمونه‌گیری‌های زیر، یک نمونه‌گیری تصادفی است: در هر یک واحدهای آماری، جامعه و نمونه را مشخص کنید.

الف) با تمام پلیس‌های یک پاسگاه پلیس برای پیدا کردن نظر پلیس‌های این پاسگاه راجع به تخلفات مصاحبه شد.

نمونه

انتخاب چند پاسگاه در چند شهر مختلف و در قسمت‌های مختلف یک شهر

انتخاب چند پارک مختلف در جاهای مختلف شهر

انتخاب شامپوهای تولید شده در چند روز و در چند ماه مختلف

ب) با بچه‌هایی که وارد یک پارک بازی می‌شدند پنج در میان مصاحبه شد تا وسیله بازی مورد علاقه کودکان را مورد بررسی قرار دهیم.

جامعه آماری

تمام پلیس‌های تمام پاسگاه‌ها

تمام بچه‌های مشغول بازی در تمام پارک‌ها

تمام شامپوهای تولیدی در کارخانه

پ) برای بررسی PH شامپوهای تولیدی یک کارخانه، شامپوها را صد در میان مورد آزمایش قرار دادیم.

واحد آماری

افراد مختلف

بچه‌های وارد شده در پارک

شامپوهای تولیدی در یک کارخانه

۶- برای تحقیقات و بررسی‌های زیر جامعه را مشخص کرده و روش نمونه‌گیری را پیشنهاد کنید.

الف) پیدا کردن درصد بیکاران استان مازندران. جامعه: کل نیروهای کاری موجود در استان - نمونه‌گیری: تصادفی

ب) مردان کدام شامپو را بیشتر ترجیح می‌دهند. جامعه: کل مردان - نمونه‌گیری: از مردان با سطح درآمدهای متفاوت و از مناطق مختلف یک نمونه به تصادف انتخاب می‌کنیم.

۷- می‌خواهیم مدت زمانی را که دانش‌آموزان کلاس شما در طول یک هفته صرف مطالعه کتاب‌های غیردرسی می‌کنند آمارگیری کنیم.

الف) در این آمارگیری جامعه را مشخص کنید. جامعه آماری کل دانش‌آموزان کلاس

ب) یک روش نمونه‌گیری برای انتخاب نمونه معرفی کنید. دانش‌آموزان را به صورت ۳ در میان انتخاب می‌کنیم.

پ) از چه روشی برای گردآوری اطلاعات استفاده می‌کنید. پرسش‌نامه

ت) اندازه (تعداد) این جامعه چه قدر است؟ **بستگی به کلاس مورد نظر دارد (مثلاً ۳۰ نفر)**

ث) اندازه نمونه مورد بررسی چه قدر است؟ آیا این تعداد برای بررسی مورد نظر مناسب است: در صورت مناسب نبودن، روش نمونه‌گیری و نمونه خود را اصلاح کنید. **۱۰ نفر**

ج) متغیر مورد مطالعه در این مسئله چیست؟ توضیح دهید. **مدت زمان مطالعه کتاب غیر درسی**

چ) متغیر مورد مطالعه از چه نوعی است؟ **کمی**

۸- نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص کرده و بهترین مقیاس اندازه‌گیری آن‌ها را ذکر کنید.

الف) رنگ اتومبیل‌های موجود در یک نمایشگاه اتومبیل. **کیفی اسمی**

ب) درجه حرارت کلاس شما در روزهای سال. **کمی فاصله‌ای**

پ) گنجایش آب یک تانکر. **کمی نسبتی**

ت) تعداد شکایات رسیده شده به یک پاسگاه پلیس. **کمی نسبتی**

ث) درآمد دانشجویان شاغل به کار. **کمی فاصله‌ای**

ج) وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت. **کیفی اسمی**

چ) سن دانشجویان شرکت‌کننده در یک دوره هنری. **کمی نسبتی**

۹- میزان پرداخت حقوق در یک شرکت خصوصی در جدول زیر آمده است:

سمت	مدیر شرکت	معاون	حسابدار	بازاریاب	۲ نفر فروشنده	منشی	مستخدم
حقوق میلیون ریال	۱۰۰	۶۰	۳۰	۲۰	۲۰	۱۲	۸

مدیر شرکت در آگهی دعوت به همکاری در روزنامه اعلام می‌دارد که میانگین پرداخت حقوق در این شرکت بیشتر از ریال است. آیا این رقم می‌تواند دلیلی برای پرداخت حقوق بالاتر این شرکت باشد؟ چرا؟

۳۱/۲۵ - خیر زیرا داده دور افتاده داریم.

کدام یک از معیارهای گرایش به مرکز برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت مناسب‌تر است؟

میان و دامنه میان چارگی

۱۰. نمرات درس فیزیک دانش‌آموزی در طول سال برابر است با:

۱۷	۱۹	۱۸	۷	۱۸	۱۹
----	----	----	---	----	----

الف) میان و میانگین را برای نمرات این دانش‌آموز حساب کنید. **میان = ۱۸ میانگین $\bar{x} = 16/3$**

ب) کدام یک از شاخص‌های فوق، بیانگر بهتری از وضع این دانش‌آموز در درس فیزیک است؟ **میانگین**

پ) اگر معلم درس فیزیک این دانش‌آموز، برای جبران نمره ۷، امکان امتحان مجدد را به او بدهد، برای این

که میانگین وی در این درس بیشتر از ۱۸ شود، او در این امتحان چه نمره‌ای باید کسب کند. **باید نمره بالای ۱۷**

کسب کند.

۱۱. دو دسته داده زیر قیمت کالایی را در دو بازار جداگانه برحسب هزار ریال نشان می‌دهد.

۸	۱۳	۹	۱۲	۱۰	۱۱	۱۲	۹	۱۰	۱۱	۱۰	بازار الف
۱۰	۱۳	۸	۱۰	۹	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱	۹	۱۰	بازار ب

الف) در کدام دسته پراکندگی بیشتر است؟ **دسته الف**

ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید. **دامنه تغییرات ب = $۱۳ - ۸ = ۵$ دامنه تغییرات الف = $۱۳ - ۸ = ۵$**

پ) آیا دامنه تغییرات با پراکندگی مشاهده شده در «الف» همخوانی دارد؟ **خیر**

ت) ترجیح می‌دهید از کدام بازار خرید کنید؟ چرا؟ **بازار ب زیرا پراکندگی کمتری دارد.**

ث) اگر داده‌ها را در اختیار نداشته باشید، فقط به صرف داشتن دامنه تغییرات می‌توانید تصمیم‌گیری کنید. **خیر، زیرا دامنه تغییرات به درستی میزان تغییرات را نشان نمی‌دهد.**

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی و آمار دهم انسانی - فصل پنجم

نمایش داده‌ها

فهرست

۳	درس اول: نمودار یک متغیره
۱	صفحه ۱۱۲ فعالیت — آسیب دیدگی در منازل: نمودار میله‌ای و دایره‌ای
۲	صفحه ۱۱۳ کار در کلاس — مصرف روزانه میوه و سبزی
۳	صفحه ۱۱۴ فعالیت — نمودار دایره‌ای وضعیت استفاده از اینترنت
۴	صفحه ۱۱۵ کار در کلاس — بازی با نمودار
۵	صفحه ۱۱۶ تمرین — سود خالص شرکت و نمودارهای خطی
۶	صفحه ۱۱۷ فعالیت — امتیاز دو بازیکن و نمودار نقطه‌ای
۷	صفحه ۱۲۰ کار در کلاس — رسم نمودار جعبه‌ای
۸	صفحه ۱۲۱ تمرین — نمودارهای میله‌ای و سن بازیکنان تیم ملی
۱۱	درس دوم: نمودار چند متغیره
۹	صفحه ۱۲۴ کار در کلاس — نمودار حبابی
۱۰	صفحه ۱۲۴ تمرین — نمودار حبابی: گزینه‌ها
۱۱	صفحه ۱۲۸ کار در کلاس — نمودار راداری نمره درس‌ها
۱۲	صفحه ۱۲۸ تمرین — نمودار راداری: پرسش‌ها و شاخص‌های سلامت

درس اول: نمودار یک متغیره

فعالیت

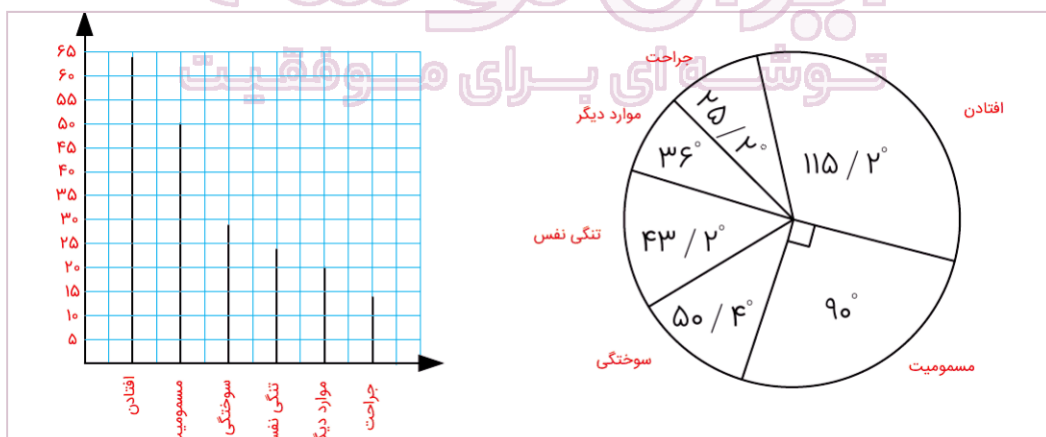
صفحه ۱۱۲

۱



در کلاس قرار شد هر دانش آموز با توجه به داده های موجود در رسانه ها در مورد یک موضوع اجتماعی یا فرهنگی در زندگی روزمره گزارشی در قالب یک شکل ارائه کند. مثلاً حسن در مورد موضوع علل آسیب دیدگی ۲۰۰ نفر در منازل اطلاعاتی کسب کرده بود. او گزارش خود را در یک شکل خلاصه کرده است. او با اطلاعاتی که در اختیار داشته است ابتکار جالبی به خرج داده و نمودار زیر را رسم کرده است. از این نمودار چه اطلاعاتی می توان کسب کرد؟ به عنوان مثال، بیشترین آسیب دیدگی در منازل بر اثر افتادن یا زمین خوردن است.

معلم از موضوع انتخابی و نمایش ترتیبی مکعب ها برحسب طول آنها رضایت کامل داشت؛ ولی از دانش آموزان درخواست کرد که اگر می توانند پیشنهادی برای بهتر شدن آن ارائه کنند. آیا شما قبل از دیدن نظرها می توانید چند پیشنهاد برای بهبود نمودار کنید؟ نمودار میله ای انواع آسیب دیدگی برحسب تعداد رسم کنید؟ مراحل رسم نمودار دایره ای را به خاطر بیاورید و آن را در چند گام خلاصه کنید. نمودار دایره ای درصد آسیب دیدگی ها را نیز رسم کنید.



$$\frac{32}{100} \times 200 = 64$$

افتادن یا زمین خوردن:

$$115/2$$

$$\frac{25}{100} \times 200 = 50 \text{ مسمومیت:}$$

$$\frac{14}{100} \times 200 = 28 \text{ سوختگی:}$$

$$\frac{12}{100} \times 200 = 24 \text{ تنگی نفس:}$$

$$\frac{10}{100} \times 200 = 20 \text{ موارد دیگر:}$$

$$\frac{7}{100} \times 200 = 14 \text{ جراحات:}$$

$$\frac{25}{100} \times 360 = 90$$

$$\frac{14}{100} \times 360 = 50/4$$

$$\frac{12}{100} \times 360 = 43/2$$

$$\frac{10}{100} \times 360 = 36$$

$$\frac{7}{100} \times 360 = 25/2$$

جمع بندی پیشنهادها براساس آموخته های ما برای رسم نمودار در سال های گذشته به صورت زیر است:
رسم مکعب مستطیل به جای مستطیل خوب نیست، چون ممکن است اطلاعات دقیق به بیننده انتقال ندهد.

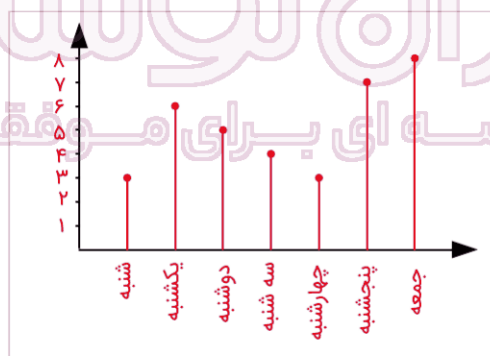
نمودار میله ای برای متغیرهای اسمی بهتر از هیستوگرام است.
زمانی که درصد را گزارش می کنیم بهتر است از نمودار دایره ای استفاده کنیم تا بهتر بتوانیم مقایسه انجام دهیم.

کار در کلاس

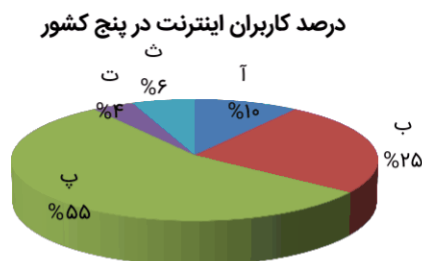
صفحه ۱۱۳

۲

در کلاس درس خود متوسط مصرف روزانه انواع میوه ها یا سبزی ها را به یکی از روش های فصل قبل، جمع آوری کنید و آنها را با یک نمودار مناسب نمایش دهید. مثلاً اگر در روز شنبه ۳، یکشنبه ۶، دوشنبه ۵، سه شنبه ۴، چهارشنبه ۳، و پنجشنبه ۷ و جمعه ۸ نوع میوه یا سبزی خورده باشید، میانگین آن ها برابر ۵/۱۴ است که ۵ در نظر می گیرید.



از نمودار دایره‌ای مقابل برای نشان دادن وضعیت استفاده از اینترنت در پنج کشور استفاده شده است. کدام کشور دسترسی بیشتری به اینترنت دارد؟ **کشور پ**



آیا اطلاعات این نمودار برای پاسخ به سوال قبلی کافی است؟ **بله**

چه اطلاعاتی از این نمودار کسب می‌کنید؟ **درصد تعداد کاربران**

اینترنت در پنج کشور

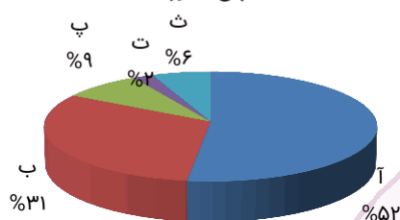
اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم، واقعیت میزان توسعه‌ی اینترنت و میزان استفاده از آن در کشورهای مختلف را به صورت روبه‌رو نشان داد. آیا برداشت شما از نمودار قبل تغییر کرد؟ **بله**

اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم، می‌توان واقعیت میزان توسعه‌ی اینترنت و میزان استفاده از آن در کشورهای مختلف را می‌توان به صورت رو به رو نشان داد. آیا برداشت شما از نمودار قبل تغییر کرد؟ **بله**

به نظر شما رسم نمودار دایره‌ای به صورت دو بعدی که در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید بهتر است یا سه بعدی مانند

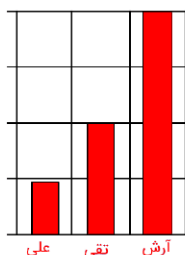
دو نمودار قبلی؟ **به صورت دو بعدی**

درصد کاربران اینترنت نسبت به کل جمعیت در پنج کشور



بازی با نمودار

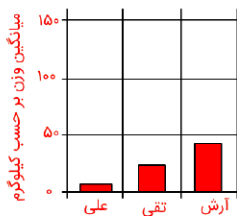
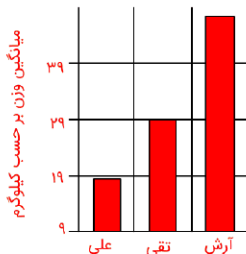
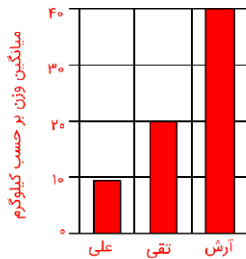
به کارگیری غلط یا سوءاستفاده از نمودارها، راه‌های ساده‌ای برای گمراه کردن افراد هستند. افراد مایل‌اند به نمودارها به عنوان روشی سریع برای ارزیابی مجموعه‌ای از اعداد بنگرند. اما مراقب باشید که فریب نخورید.



۱) بیاپید از کدو تنبل‌های باغ‌های آرش، تقی و علی استفاده کنیم. اولین نمودار به صورت زیر است:

این نمودار چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ وزن، حجم، پهنا یا ارتفاع کدو تنبل‌ها؟

وزن، حجم، پهنا، ارتفاع - می‌تواند هر یک از ویژگی‌های کدو تنبل را نمایش دهد.



۲) نمودار زیر چه تفاوتی با نمودار بالا دارد؟ این نمودار مشخص کرده که ویژگی وزن کدو تنبلها را مورد بررسی و نمایش قرار داده است.

این نمودار به چه اطلاعات بیشتری اشاره می کند؟

میانگین دقیق وزن کدوتنبل های هر یک از افراد اشاره می کند.

۳) اگر نقطه ی شروع محور عرض ها را از صفر به عدد ۹ تغییر دهیم، چه تغییری در نتیجه حاصل می شود؟

در واقع اعداد همان اعداد قبلی اند، اما محور عرض ها تغییر کرده است. اکنون این طور به نظر می رسد که کدوتنبل های باغ زیر ۹ کیلوگرم نیستند.

۴) اینک اگر کسی بخواهد دیگران را متقاعد کند که همه ی کدوتنبل ها حدوداً به یک اندازه اند چه کاری می تواند بکند؟ به این نمودار نگاه کنید.

اگر طول بازه های اعدادی که میانگین وزن کدوتنبل ها را نشان می دهد زیاد کنیم ارتفاع نمودارها به هم نزدیک می شود و با این کار می توان نتیجه گرفت که وزن کدو تنبل ها حدوداً یک اندازه است.

اعداد تغییری نکرده اند؛ اما محور عمودی دوباره تغییر کرده است. چه تغییری کرده است؟

طول بازه های مشخص کننده ی میانگین زیاد شده است.



گاهی برای نمایش داده ها از یک تصویر استفاده می شود مثل شکل مقابل. این تصویر داده ها را از شکل طبیعی خارج می کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن ها، این تصویر ارتفاع هر کدو تنبل را برای نشان دادن وزنش، تغییر میدهد.

ارتفاع کدوی تنبل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل علی (۱۰ کیلوگرم) است؛ ارتفاع کدو تنبل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل تقی و چهار برابر ارتفاع کدو تنبل علی است. آیا این شکل اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می کند؟ (راهنمایی: فرمولهای محاسبه و مساحت را به یاد آورید: مساحت مستطیل = طول × عرض و مساحت دایره $r^2 \pi$)

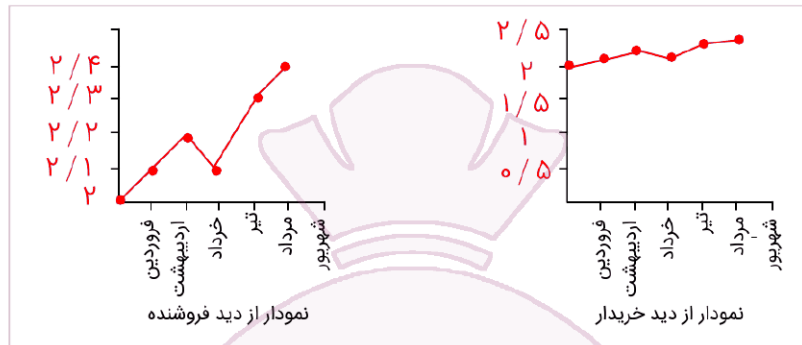
شما چگونه این شکل را رسم می کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟ کدوها را با سطح مقطع مساوی و ارتفاع متناسب با میانگین وزن داده شده رسم می کردیم.

به نظر شما آیا رنگ در انتقال نظر خودتان به بیننده تأثیر دارد؟ خیر.

۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۲/۰	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۳	۲/۴

خریدار و فروشنده سهام این شرکت نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:



به نظر شما کدام یک منطقی تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟ **نمودار سمت چپ نشان دهنده موفقیت فروشنده و نمودار سمت راست نشان دهنده عملکرد شرکت از دید خریدار است که هیچ یک منطقی نیستند.**

۲. اگر درصد یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم نزدیک به هم باشند آیا نمودار میله‌ای یا دایره‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است؟ **خیر، زیرا تفاوت داده‌ها را به درستی نشان نمی‌دهند.**

۳. رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های کمی یا کیفی مناسب‌تر هستند؟ **برای داده‌های کیفی**

مربی گروه (تیم) بسکتبال شهر می‌خواهد بر اساس نتایج بازی‌های قبلی دو بازیکن نسبت به حضور یکی از آن‌ها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیازهای کسب شده توسط این دو بازیکن به صورت زیر است.

بازیکن الف:

امتیاز کسب شده	۳	۶	۷	۱۰	۱۱	۱۳	۳۰
تعداد بازی‌ها	۲	۱	۲	۳	۱	۱	۱

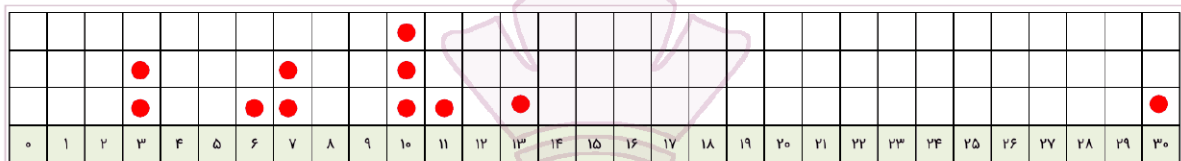
بازیکن ب:

۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	امتیاز کسب شده
۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱	تعداد بازی‌ها

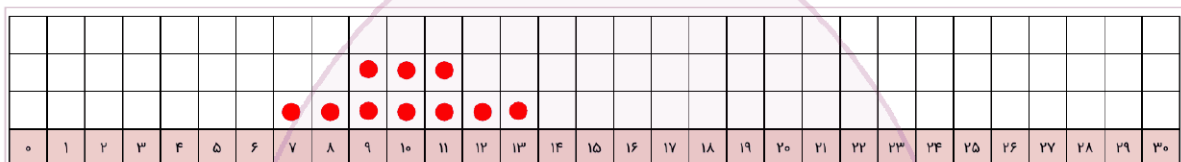
می‌توان داده‌های مرتب شده به صورت زیر نشان داد:

۳	۳	۶	۷	۷	۱۰	۱۰	۱۰	۱۱	۱۳	۳۰	بازیکن الف
	۷	۸	۹	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۲	۱۳	بازیکن ب

اگر هر یک از اعداد را به صورت نقطه بالای یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل نمودار نقطه‌ای داده‌ها می‌گویند. نمودار نقطه‌ای امتیازهای بازیکن الف را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.



نمودار نقطه‌ای داده‌ها را برای بازیکن ب بر روی محور نمایش دهید.



به نظر شما کدام بازیکن بهتر است؟ «بازیکن ب» چون انحراف امتیازات بازیکن ب کمتر از بازیکن الف است.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



کار در کلاس

صفحه ۱۲۰

۷

برای مجموعه داده‌های زیر نمودار جعبه‌ای بکشید.

$1/25, 1/5, 2/5, 2/75, 3/1, 3/2, 4/1, 4/25, 4/75, 4/8, 4/95, 5/1$

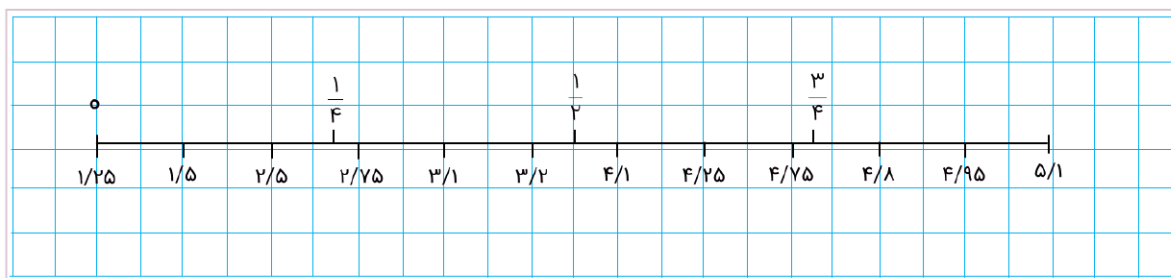
راه حل:

گام اول: کمترین مقدار و بیشترین مقدار را مشخص کنید.

از آن جایی که اعداد به ترتیب چیده شده‌اند، اولین عدد **کمترین** مقدار است و آخرین عدد **بیشترین** مقدار.

گام دوم: چارک‌ها را مشخص کنید.

در این مجموعه ۱۲ عدد وجود دارد. می‌توانیم از شکل زیر یا از فرمول برای تعیین چارک‌ها استفاده کنیم.



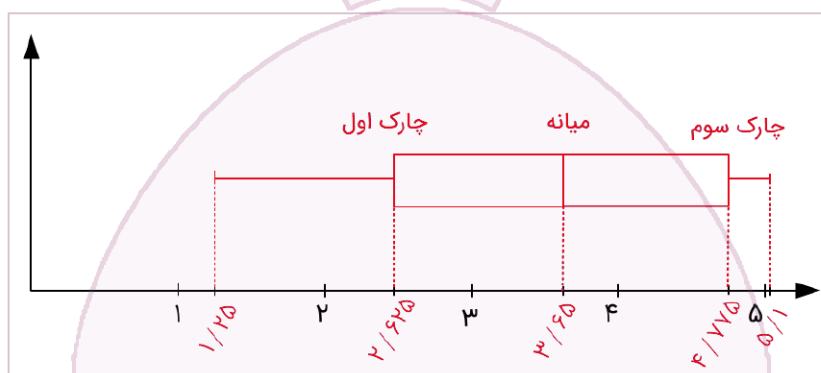
با نگاه به شکل بالا در می یابیم که میانه بین مقادیر $\frac{3}{2}$ و $\frac{4}{1}$ است. بنابراین، مقدار میانه می شود:

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{1}}{2} = \frac{3}{65}$$

چارک اول، بین مقادیر $\frac{2}{5}$ و $\frac{2}{75}$ قرار می گیرد. بنابراین، مقدار اولین چارک می شود: $\frac{2}{625}$

چارک سوم بین مقادیر $\frac{4}{75}$ و $\frac{4}{8}$ قرار می گیرد. بنابراین، مقدار سومین چارک می شود: $\frac{4}{775}$

گام سوم: نمودار جعبه ای رسم کنید.



تمرین

صفحه ۱۲۱

۸

۱. نمودارهای میله ای فراوانی یا درصدها را نشان می دهند. چه زمانی باید از فراوانی ها و چه زمانی از درصدها استفاده کرد؟

هر گاه بخواهیم فراوانی مطلق را نشان دهیم، هرگاه بخواهیم فراوانی نسبی را نشان دهیم.

۲. نمودارهای میل های افقی درست شبیه نمودارهای میل های عمودی هستند. با این تفاوت که محورهای چرخیده اند. به نمودارهای میل های عمودی مرسوم تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میل های افقی چه زمانی مفید است؟

زمانی که اسم رده ها طولانی باشد مفید واقع می شود.

۳. سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

۲۷	۲۴	۲۶	۲۶	۲۹	۱۹	۳۱	۱۸	۲۳	۲۲	۲۵	۲۶	۲۷	۲۳	۲۹	۲۵	۲۵	۳۳	۳۱	۲۱	۲۶	۲۵
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

الف) نمودار نقطه‌ای رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم روی محور افقی نشان دهید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع سن بازیکن ها}}{\text{تعداد بازیکن ها}}$$

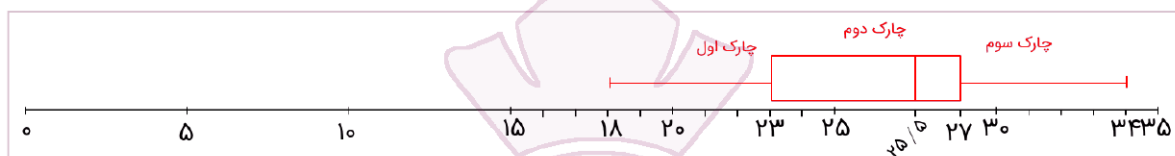
$$\text{میانگین} = \frac{۱۸ + ۱۹ + ۲۱ + ۲۲ + (۲۳ \times ۲) + ۲۴ + (۲۵ \times ۴) + (۲۶ \times ۴) + (۲۷ \times ۲) + (۲۹ \times ۲) + (۳۱ \times ۲) + ۳۳}{۲۲} =$$

$$\text{میانگین} = ۲۵/۵$$

$$\text{میانه} = \frac{۲۵ + ۲۶}{۲} = ۲۵/۵$$

$$\text{مد} = ۲۵ / ۲۶$$

ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.



ج) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کمتر است؟ **هر دو برابر ۱۱ است.**

د) تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کمتر است؟ میانگین و میانه را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تعداد هر دو برابر است پس میانه و میانگین یکی است.

ه) چه تعداد از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید به این سؤال پاسخ دهید؟

برابر ۱۱ است چون نصف داده‌ها بین چارک اول و سوم هستند. پس اگر تعداد داده‌ها تقسیم بر ۲ شود تعداد اعداد بین چارک اول و سوم به دست می‌آید.

							●	●				
							●	●				
				●		●	●	●	●	●		
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
۱۸	۱۹	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	

درس دوم: نمودار چند متغیره

۹

صفحه ۱۲۴

کار در کلاس

قد و وزن و نمره درس های ریاضی و ادبیات فارسی دانش آموزان کلاس را مشابه آنچه در فعالیت دیدید، در یک جدول یادداشت کنید.

برای هر کدام از دسته های سه تایی متغیرهای زیر، نمودار حبابی رسم کنید:

(آ) قد، وزن، نمره ریاضی

(ب) قد، وزن، نمره ادبیات فارسی

(پ) قد، نمره ریاضی، نمره ادبیات فارسی

سپس در هر نمودار، جای متغیرها را چنان عوض کنید که دایره ها هر بار، نشان دهنده یکی از متغیرها باشند.

۱: موقعیت نقطه روی محور افقی

۲: موقعیت نقطه روی محور عمودی

۳: اندازه نقطه (قطر دایره) بر اساس قد

دانش آموزان

قد ۳ وزن ۲ نمره ریاضی ۱

قد ۳ وزن ۲ نمره ادبیات فارسی ۱

قد ۳ نمره ریاضی ۲ نمره ادبیات فارسی ۱

۱۰

صفحه ۱۲۴

تمرین

۱. مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدامیک از موارد زیر است؟

(آ) شعاع دایره

(پ) محیط دایره

(ب) قطر دایره

(ت) مساحت دایره

گزینه «ت» صحیح است.

۲. نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می روند؟

(آ) یک متغیر

(پ) سه متغیر

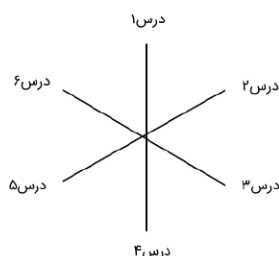
(ب) دو متغیر

(ت) محدودیتی ندارد

گزینه «پ» صحیح است.

آموزگارتان شش درس را انتخاب و برای شما به صورت زیر فهرست می کند:

1- آمار 2- عربی 3- اقتصاد 4- تاریخ 5- منطق 6- علوم و فنون



(آ) نمودار راداری نمره های خود را به صورت مقابل رسم کنید:

اگر جدول نمرات درس های مشخص شده به صورت زیر باشد با استفاده از روش رسم نمودار راداری می توان نمودار خواسته شده را رسم کرد.

درس	آمار	عربی	اقتصاد	تاریخ	منطق	علوم و فنون ادبی
نمره دانش آموز	۱۷	۲۰	۱۴	۱۲	۱۵	۱۷
بیشینه نمره در کلاس	۱۸	۲۰	۱۸	۱۷	۱۸	۱۷/۵

$$\text{آمار: } \frac{۱۷}{۱۸} \times ۱۰۰ \approx ۹۴/۵$$

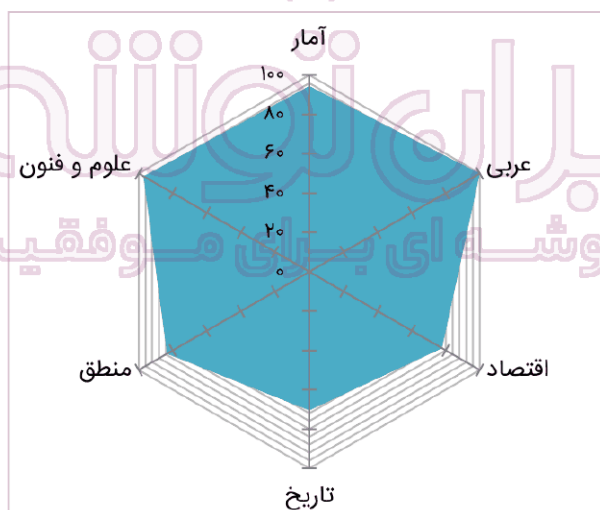
$$\text{تاریخ: } \frac{۱۲}{۱۷} \times ۱۰۰ \approx ۷۰/۵$$

$$\text{عربی: } \frac{۲۰}{۲۰} \times ۱۰۰ = ۱۰۰$$

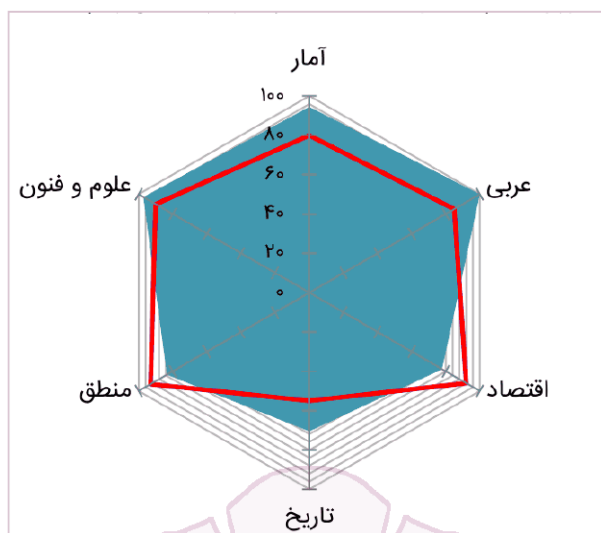
$$\text{منطق: } \frac{۱۵}{۱۸} \times ۱۰۰ \approx ۸۳/۴$$

$$\text{اقتصاد: } \frac{۱۴}{۱۸} \times ۱۰۰ \approx ۷۷/۸$$

$$\text{علوم و فنون ادبی: } \frac{۱۷}{۱۷/۵} \times ۱۰۰ \approx ۹۷/۲$$



(ب) نمودار خود را با یکی دیگر از دانش آموزان ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی رسم کنید.



پ) به نظر شما نمره های کدام تان بهتر است؟

در درس های آمار، عربی، تاریخ و علوم و فنون ادبی نمره های من بهتر است و در درس های اقتصاد و منطق نمره های دوستم بهتر است.

تمرین

صفحه ۱۲۸

۱۲

۱. نمودار راداری برای نمایش داده های چند متغیر کمی به طور همزمان به کار می رود؟ **۳ متغیر کمی یا بیشتر در قالب نمودار دو بعدی به کار می رود.**

۲. زاویه بین شعاع های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می دهد؟ **تعداد متغیرها را می تواند مشخص کند.**

۳. نمودار راداری چه چیزی به ما می گوید؟

۱) کدام مشاهده ها شبیه به یکدیگرند. ۲) آیا داده ی دور افتاده ای وجود دارد.

۳) مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است.

۴) مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده های دیگر بیشتر یا کمتر است.

۴. کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟

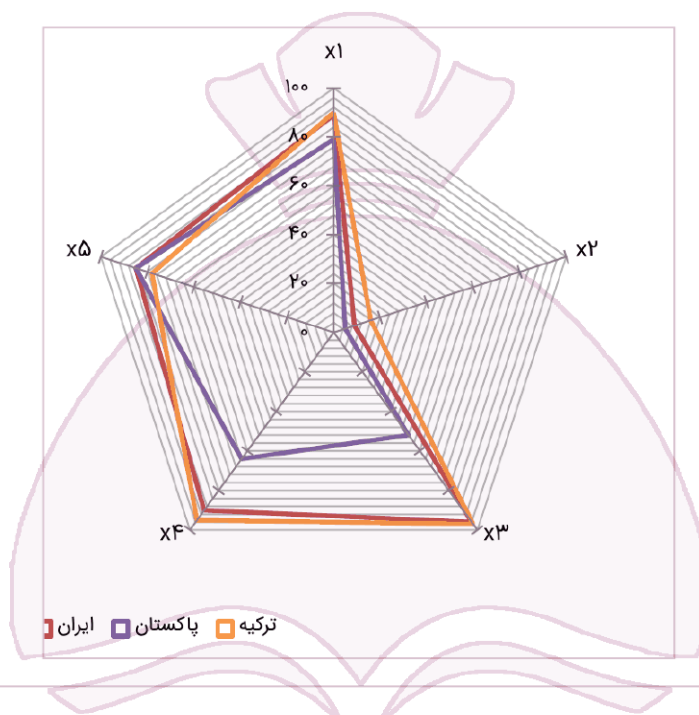
در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می شود.

۵. اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری، ۴۰ درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟

$$\frac{360}{40} = 9 \text{ متغیر در نمودار حضور دارد.}$$

۶. داده های زیر را که مربوط به شاخص های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید:

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	پیشینه	
x_1	عمر مورد انتظار در بدو تولید (سال)	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
x_2	نسبت متخصصان سلامت (به ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۳/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
x_3	نسبت ولادت‌ها به وسیله متخصصان سلامت (درصد)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
x_4	نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
x_5	شاخص آمادگی اجرای مقررات بین‌المللی سلامت	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰



این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



توشه ای برای موفقیت